

# 四面体要素を用いた大変形解析における 種々の平滑化有限要素法の性能評価

大西 有希, 天谷 賢治

東京工業大学

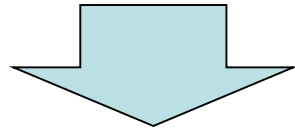


# 研究背景

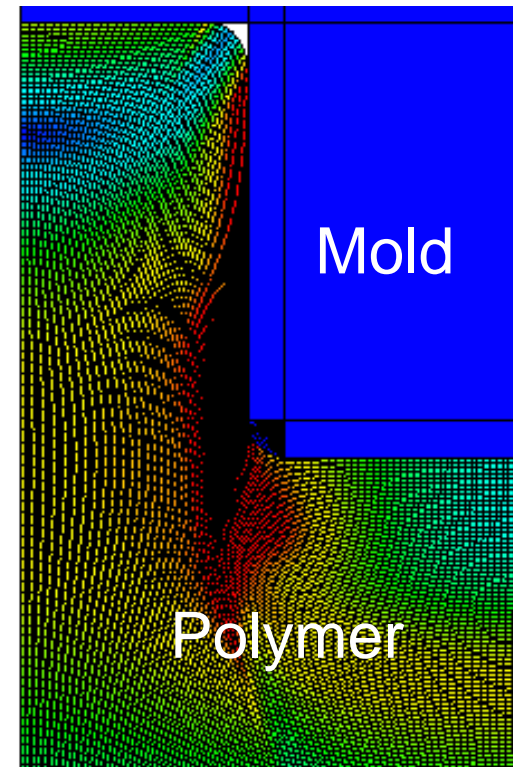
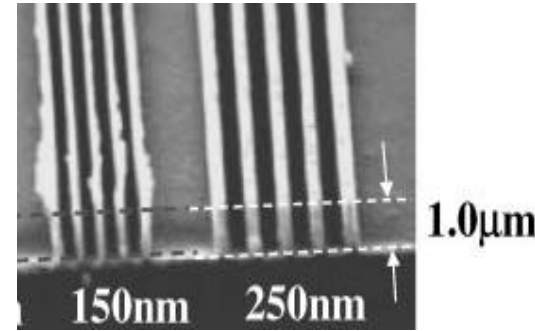
- 柔らかい微圧縮材料の静的超大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。

(最終目標: タイヤゴムの大变形, 熱ナノインプリント樹脂成形など)

- メッシュ固定のFEMを使用するとメッシュがすぐに潰れてしまい, 解が得られない。

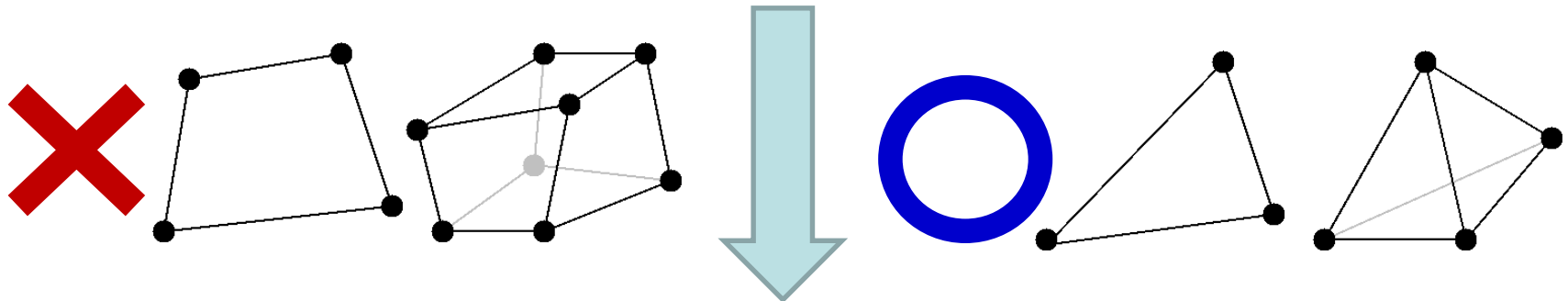


**メッシュリゾーニング** (メッシュを何度も切り直して計算を続行すること) が不可欠。



# メッシュリゾーニングの問題点

任意の変形状態を持つ領域を良質な**四角形要素** (2D) および**六面体要素** (3D) でリメッシュすることが出来ない。



三角形要素および四面体要素を使用せざるを得ない。

しかし、標準的な(定ひずみ)三角形要素および四面体要素は容易にせん断ロッキングおよび体積ロッキングを引き起こす為、低精度な解しか得ることが出来ない...

三角形／四面体要素でもロッキングを防げる  
平滑化有限要素法(S-FEM)の可能性を模索中

# 種々のS-FEM

## ■基本形

- Node-based S-FEM (NS-FEM)
- Face-based S-FEM (FS-FEM)
- Edge-based S-FEM (ES-FEM)

## ■Selective系

- Selective FS/NS-FEM
- NEW** ● Selective ES/NS-FEM (3Dは比較的最近)

## ■Bubble-enhanced系

- NEW** ● bFS-FEM (論文化はまだ)
- NEW** ● bES-FEM (2D微小変形で去年提案された)

# 研究目的

四面体／三角形要素を用いる  
最新のS-FEMの大変形解析ソルバーを開発し、  
その精度検証を行う。

今日はメッシュリゾーニング解析を一時棚上げにします。

## 発表目次

- S-FEM定式化のおさらい
- Selective ES/NS-FEM-T4の精度検証
- bES-FEM-T3の精度検証(速報)
- まとめ



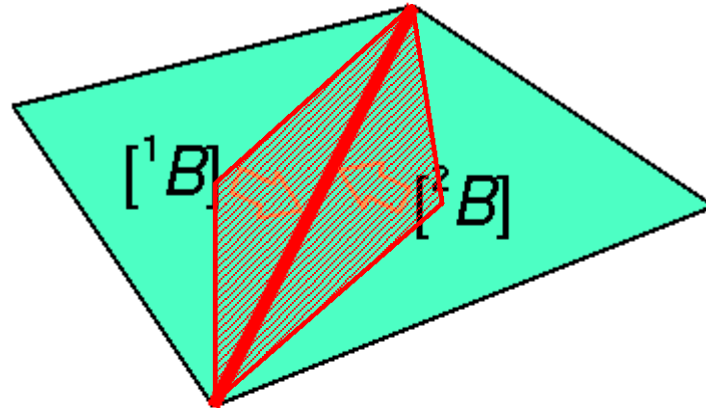
# S-FEM定式化のおさらい



# Edge-based S-FEM (ES-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するエッジに面積比で分配し,  $[^{\text{Edge}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$  等をエッジで計算.

概して高精度だが, 体積ロッキングを起こすのが欠点



積分点が  
各エッジ中心に  
あるイメージ

$[^{\text{Edge}} B]$

Edge  $T$

$\{f^{\text{int}}\}$

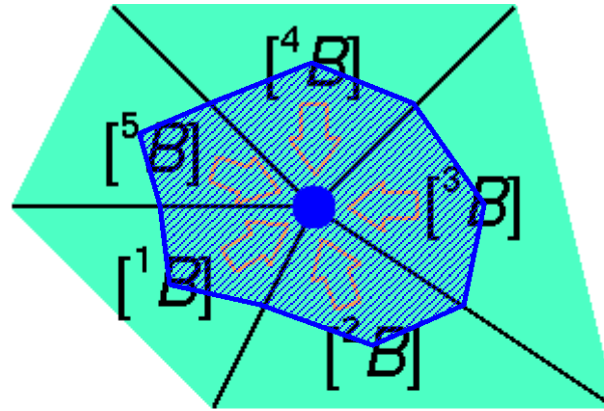
**ES-FEM**

「エッジ」を「フェイス」  
と読み替えば  
**FS-FEM for 3D**

# Node-based S-FEM (NS-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するノードに面積比で分配し,  $[^{\text{Node}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$  等をノードで計算.

せん断・体積ロッキングを起こさないが, 概して低精度なのが欠点



∵ゼロエネルギーモード  
が現れてしまうから。  
(低減積分要素で現れる  
アワーグラスモードと同等)

積分点が  
各ノードに  
あるイメージ

$[^{\text{Node}} B]$

Node  $T$

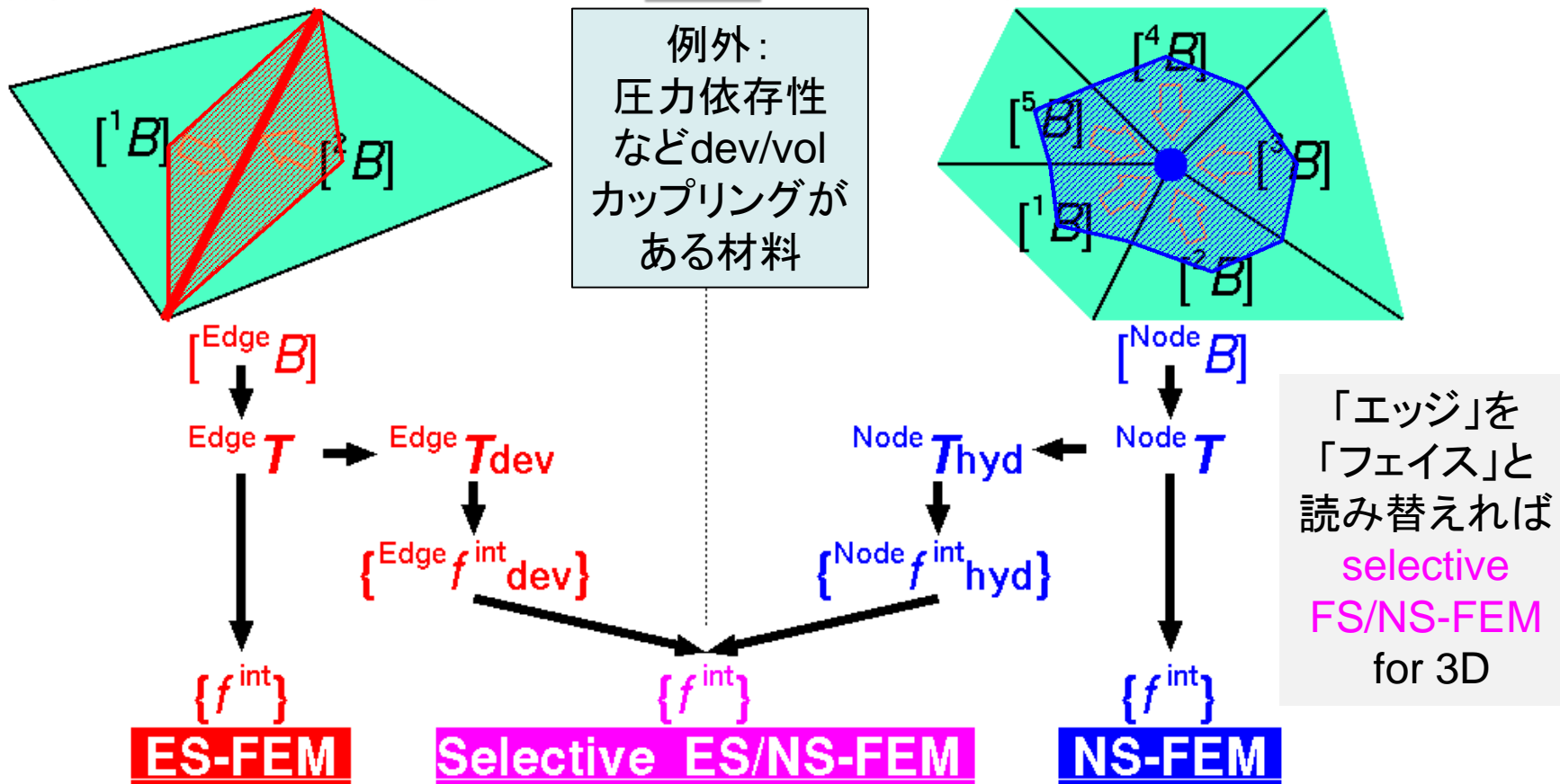
$\{f^{\text{int}}\}$

**NS-FEM**

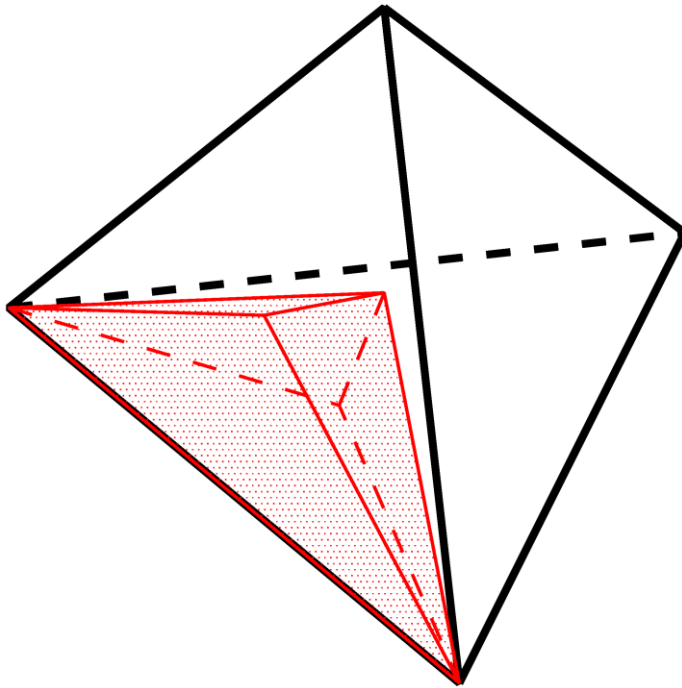


# 独自改良版 Selective ES/NS-FEM

- 応力を“deviatoric (偏差) part”と“hydrostatic (静水圧) part”に分解.(拙著IJNME2014参照)
- $F, T, \{f^{int}\}$  等をエッジとノードの両方でそれぞれ計算して合算.  
高精度でロッキングを回避し, ほぼ任意の材料モデルに適用可能

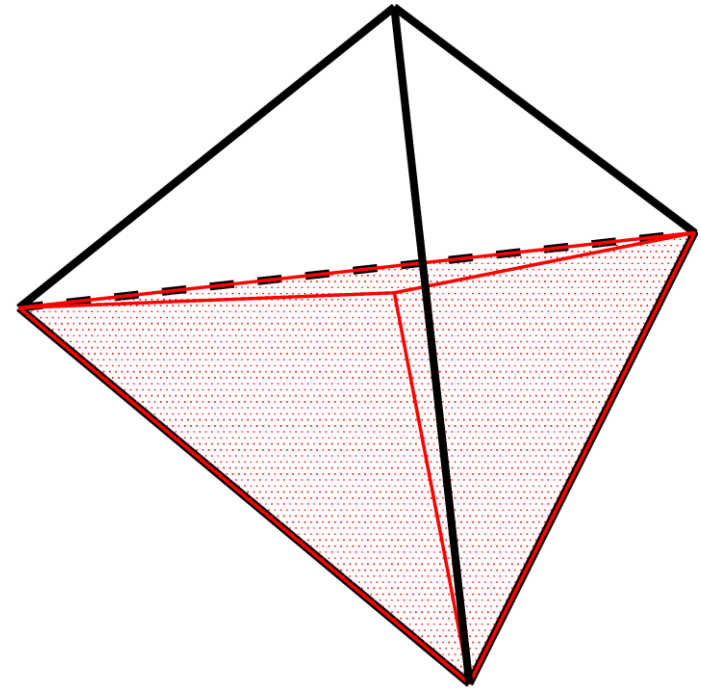


# 四面体を用いた2通りのselective S-FEM



**NEW** Selective **ES/NS-FEM-T4**

ある要素が受け持つ  
エッジの平滑化領域は  
1/6体積の双三角錐



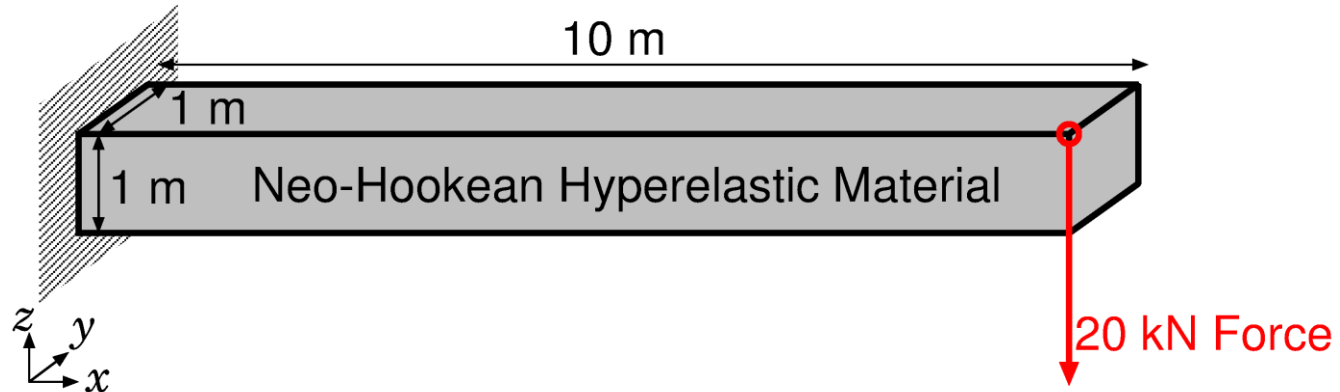
Selective **FS/NS-FEM-T4**

ある要素が受け持つ  
フェイスの平滑化領域は  
1/4体積の三角錐(四面体)

# Selective ES/NS-FEM-T4の精度検証

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

## 概要



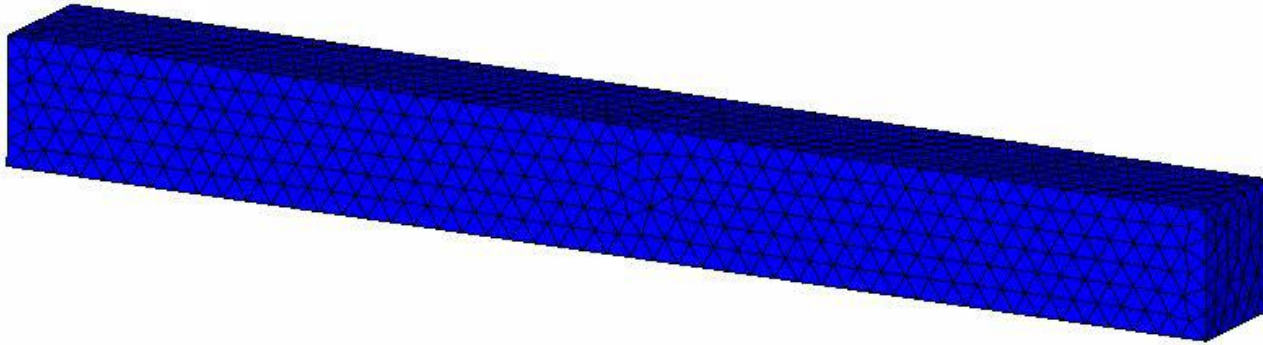
- 10m x 1m x 1m の片持ち梁の先端に 20 kN の死荷重.
- Neo-Hookean 超弾性体:

$$[T] = 2C_{10} \frac{\text{Dev}(\bar{B})}{J} + \frac{2}{D_1} (J - 1)[I].$$

- $C_{10}$  は 1 GPa で一定,  $D_1$  を様々に変化させて, 初期ポアソン比を 0.4 ~ 0.499999 の間で種々に設定.
- ABAQUS/Standard の結果と比較.

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

**FS/NS-FEMの解析結果 ( $\nu_0=0.499999$ )**



Mises Stress (Pa)

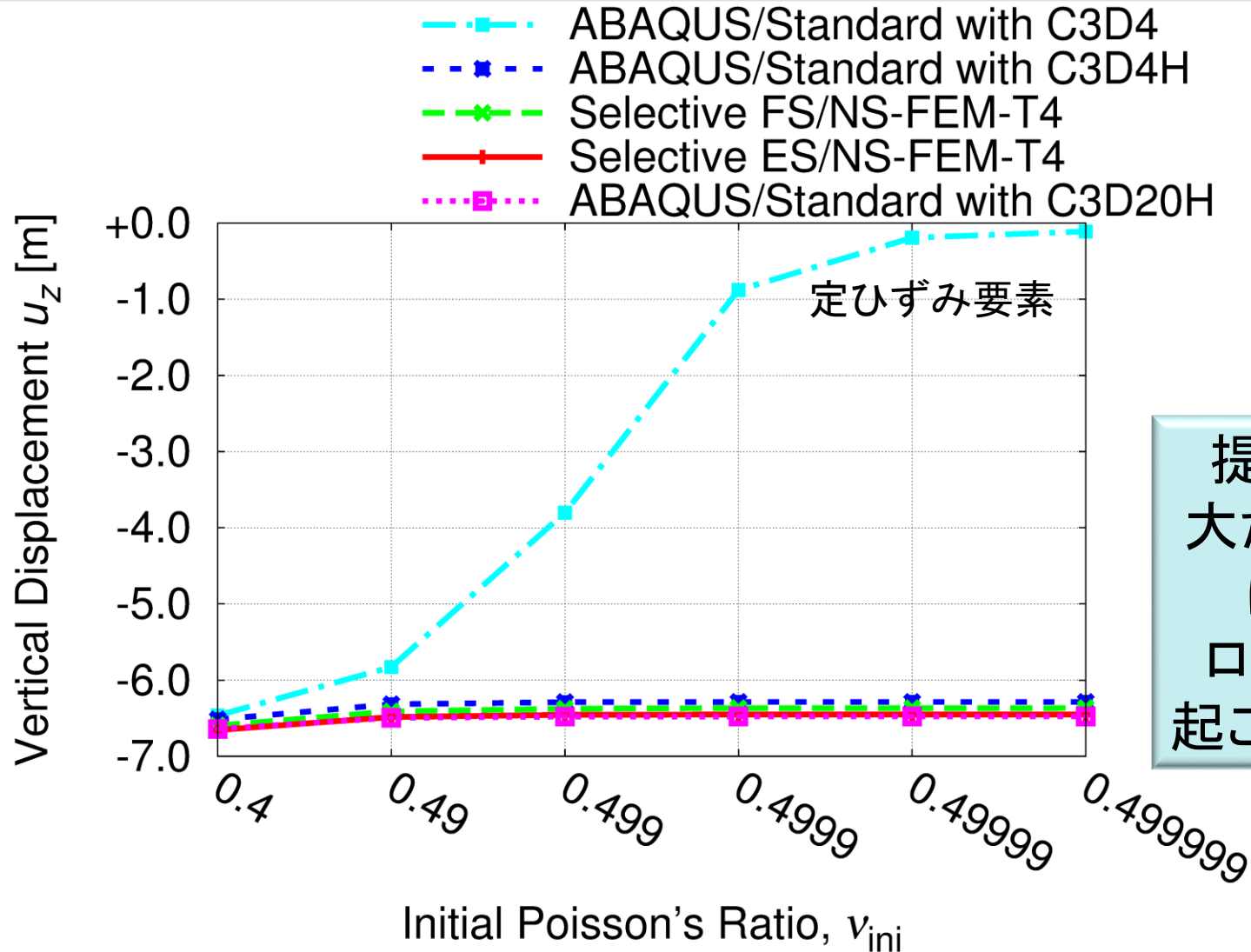


たわみ量が  
およそ6.5 mの  
大たわみ問題.

滑らかな  
Mises応力分布  
が得られている.

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

## 種々の初期ポアソン比での先端たわみ量の比較

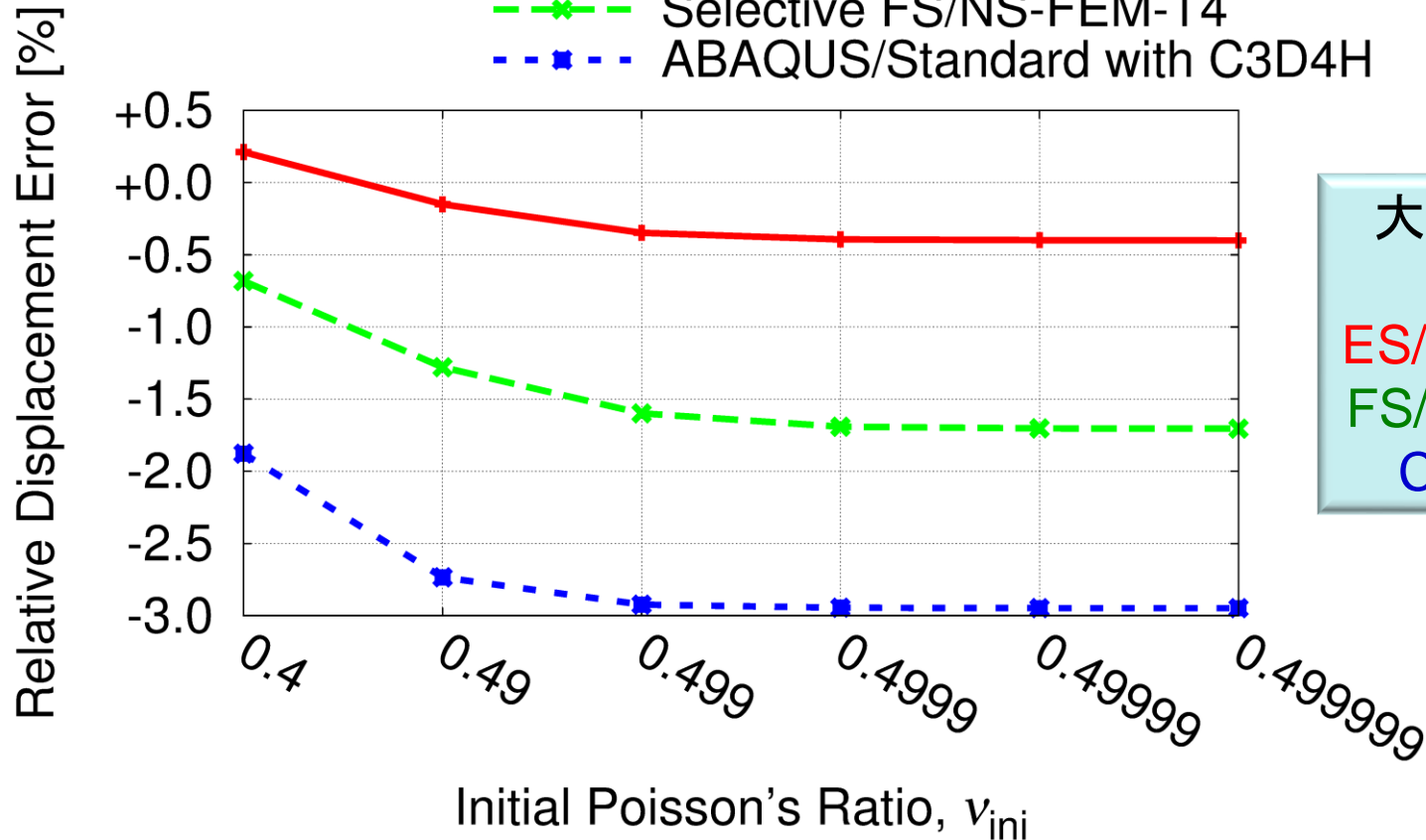


提案手法は  
大たわみ問題  
において  
ロッキングを  
起こさない！！

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

種々の初期ポアソン比での先端たわみ量の誤差比較  
(六面体2次ハイブリッド要素の結果を参照解とした時の誤差)

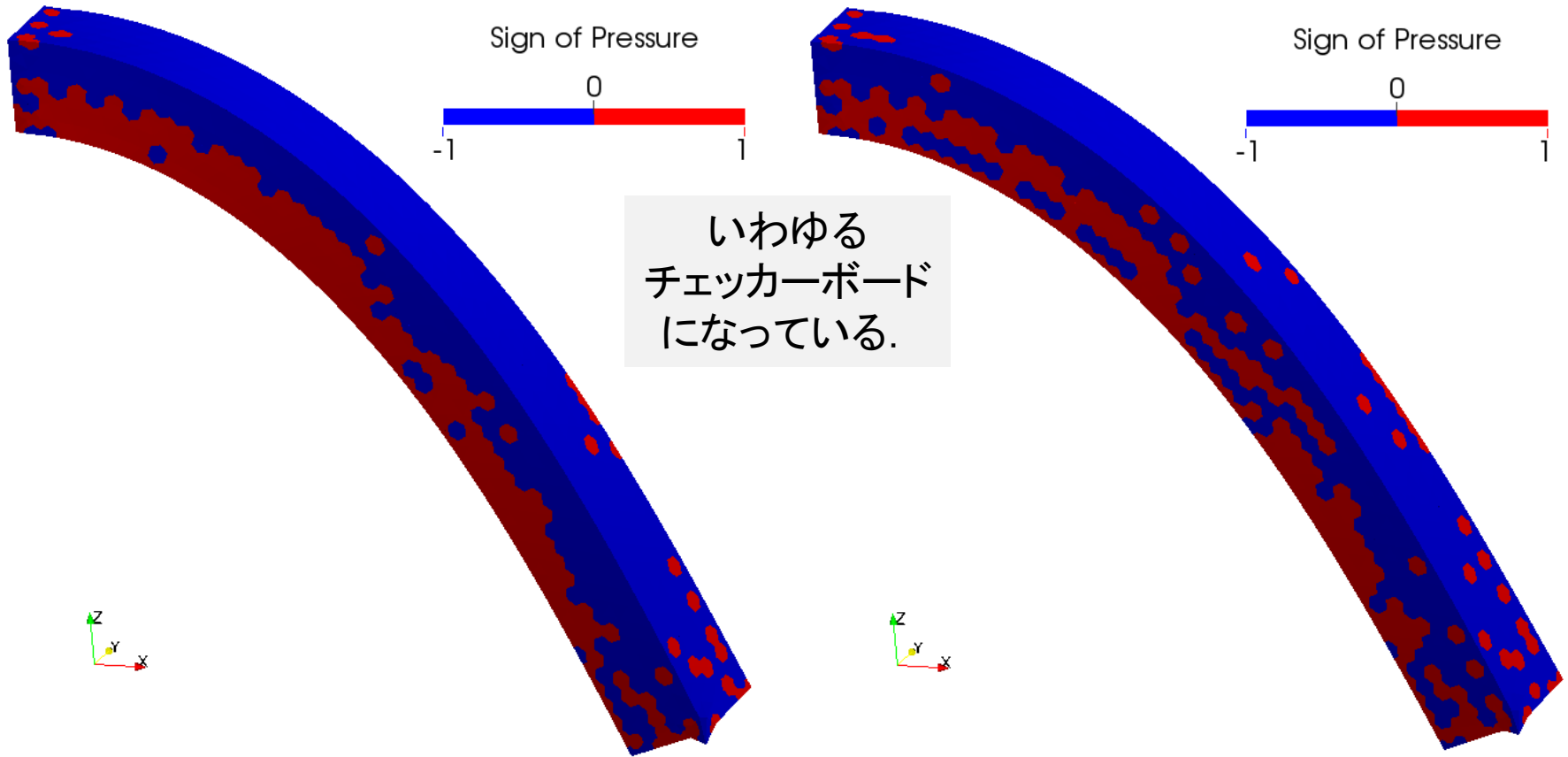
—+— Selective ES/NS-FEM-T4  
-x- Selective FS/NS-FEM-T4  
-x- ABAQUS/Standard with C3D4H



大たわみ解析の  
精度は  
ES/NS-FEMが1位  
FS/NS-FEMが2位  
C3D4Hが3位

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

節点圧力の符号の分布 ( $\nu_{ini}=0.499999$ )



Selective **ES**/NS-FEM-T4

Selective **FS**/NS-FEM-T4

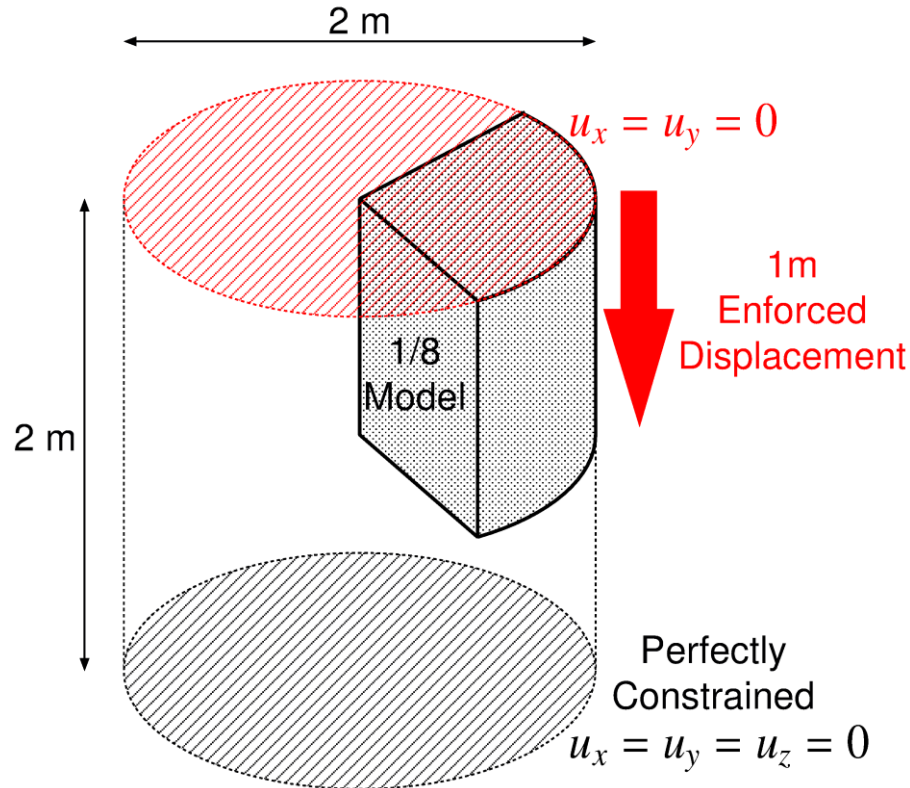
両selective S-FEM共に**圧力振動**を生じてしまっている。





# 超弾性1/8円柱の押込解析

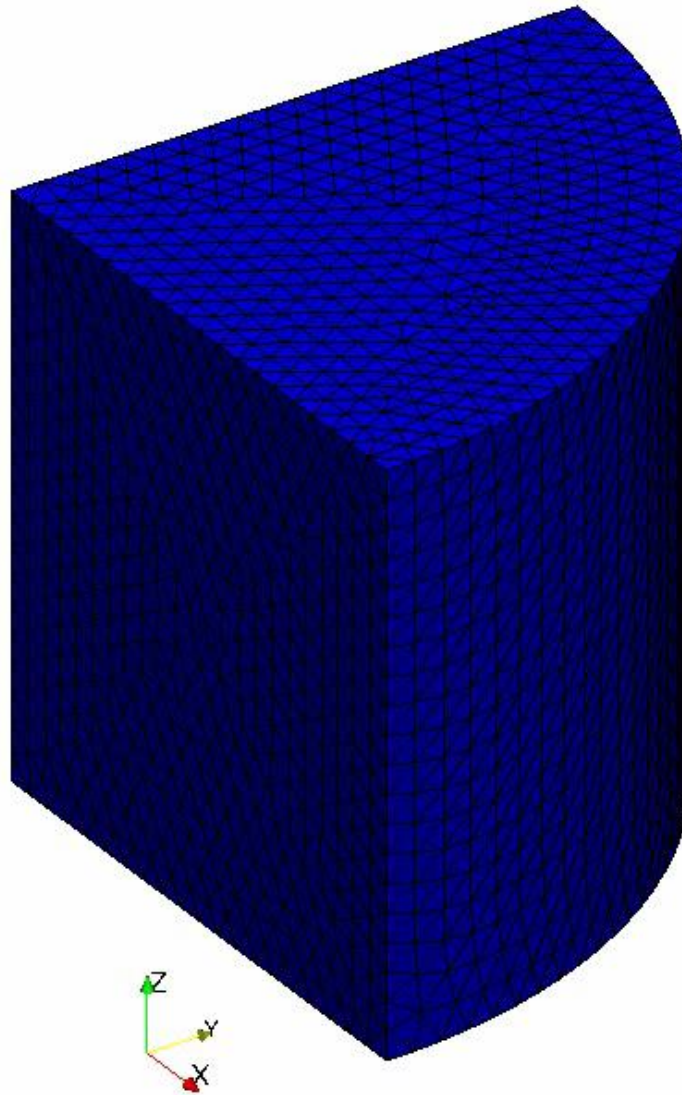
## 概要



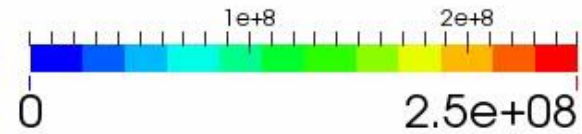
- 軸方向に50%圧縮.
- Neo-Hookean超弾性体  $C_{10} = 40 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $D = 5 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  (i.e.,  $\nu_{ini} = 0.4999$ ).
- 完全に同一のメッシュ分割で, ABAQUS/StandardのC3D4Hと結果を比較.

# 超弾性1/8円柱の押込解析

FS/NS-  
FEMの  
解析結果

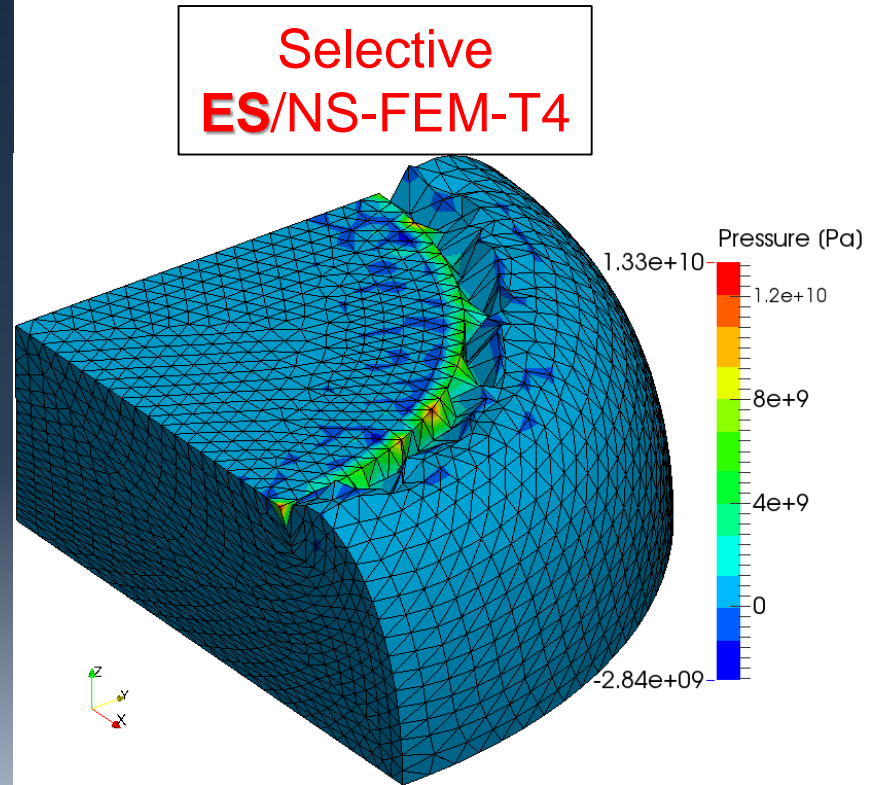
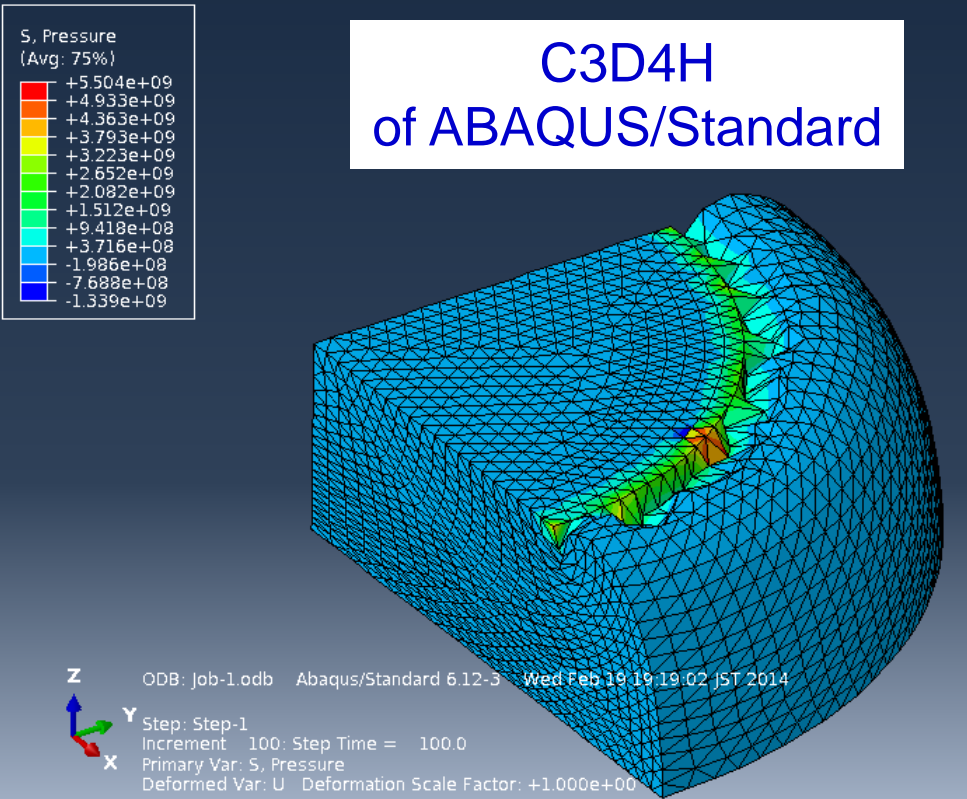


Mises Stress (Pa)



# 超弾性1/8円柱の押込解析

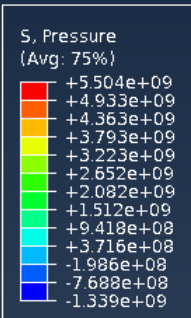
## ABAQUSのC3D4HとES/NS-FEMの比較



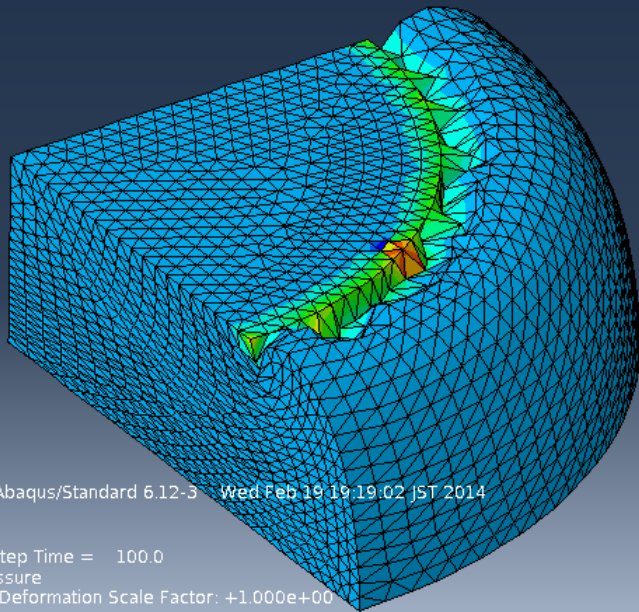
- 両者の変形形状は互いに酷似している.
- 両者共に角部でのロッキングが見られる.
- 提案手法の圧力振動の振幅がC3D4Hの約2倍.

# 超弾性1/8円柱の押込解析

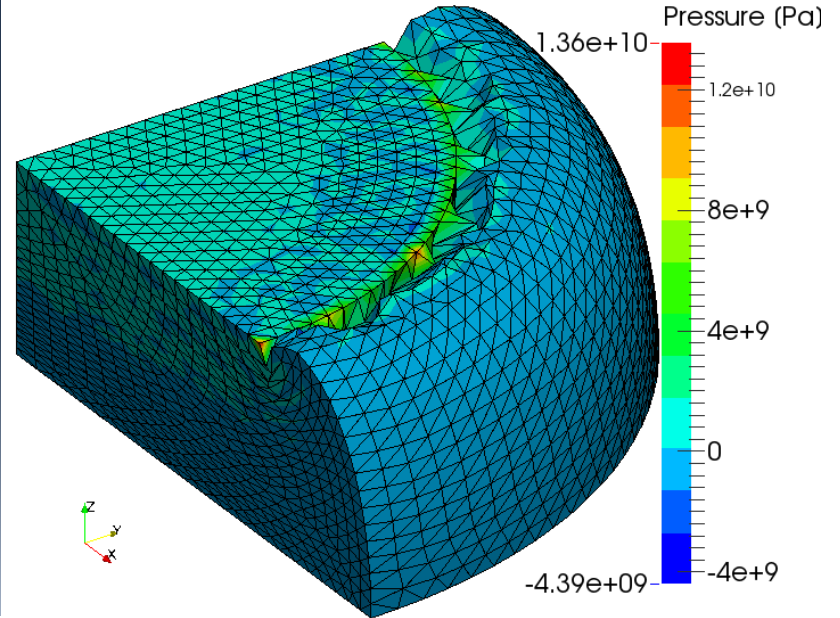
## ABAQUSのC3D4HとFS/NS-FEMの比較



C3D4H  
of ABAQUS/Standard



Selective  
FS/NS-FEM-T4



- 両者の変形形状は互いに酷似している.
- 両者共に角部でのロッキングが見られる.
- 提案手法の圧力振動の振幅がC3D4Hの約2倍.



# Selective S-FEMの3つの問題点

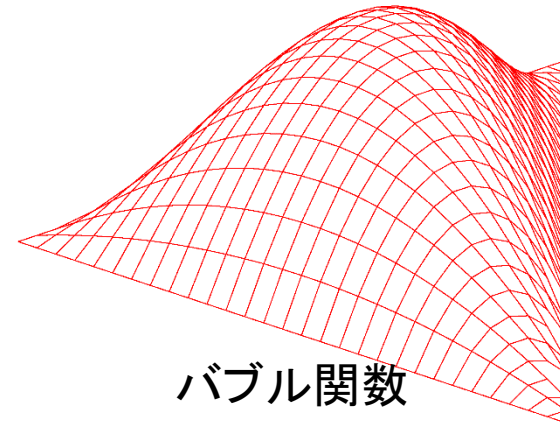
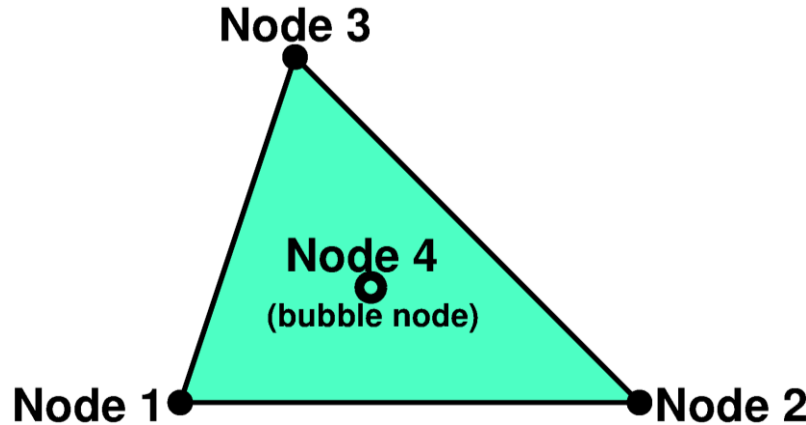
1. 応力積分の際にdev/hyd splitを行っている為dev/volカップリングのある材料モデルを扱うことが出来ない。  
(ABAQUS C3D4Hはdev/volカップリングも扱える.)
2. 微圧縮材料の変形解析において変位・荷重・Mises応力は高精度に求められるが、圧力振動が起こる為に圧力の精度が悪い。  
(ABAQUS C3D4Hも圧力振動はあるが、振幅は半分程度.)
3. 角の節点・辺・面を使用する要素が1つしかない場合、それらにはひずみ平滑化がかからないため角部がロッキングしてしまう。  
(ABAQUS C3D4Hも同様にロッキングする.)

三角形／四面体要素にバブル節点を追加した  
bubble-enhanced ES-FEM (bES-FEM)が検討され始めている。



# NEW bES-FEM-T3の精度検証(速報)

# バブル節点を持つ三角形要素とは？



重心で値が1,  
辺上や頂点で  
値が0.

バブル関数

- 通常の三角形要素の重心位置にバブル節点を追加.
- バブル節点4の形状関数は**バブル関数(気泡関数)**：

$$N_4 = 27\xi_1\xi_2\xi_3.$$

- 節点1,2,3の形状関数は通常の三角形要素の形状関数 (i.e., 面積座標値) からバブル関数を引いたものになる.

$$N_1 = \xi_1 - 9\xi_1\xi_2\xi_3,$$

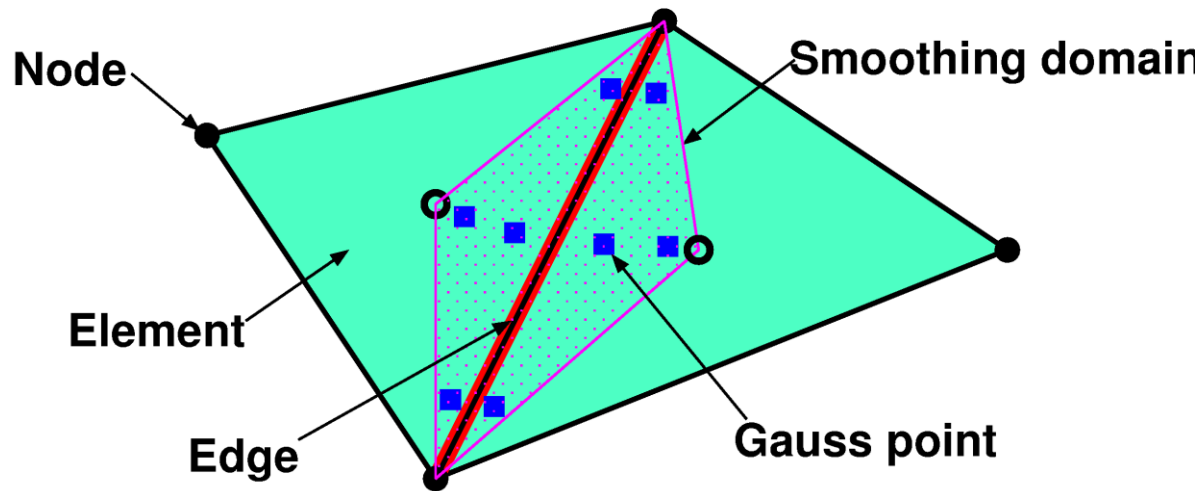
$$N_2 = \xi_2 - 9\xi_1\xi_2\xi_3,$$

$$N_3 = \xi_3 - 9\xi_1\xi_2\xi_3.$$

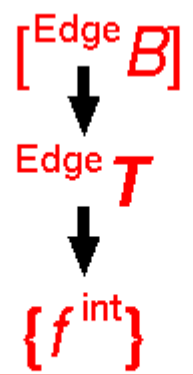
3次関数なので  
ガウスの4点積分が必要

# Bubble-enhanced ES-FEM (bES-FEM)

- エッジ周辺の8つガウス点でそれぞれ $[B]$ を計算,
- 8つの $[B]$ をエッジにガウスの重み係数比で分配し $[^{\text{Edge}}B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$ 等をエッジで計算.



(注)MINI要素とは定式化が全く異なっている.

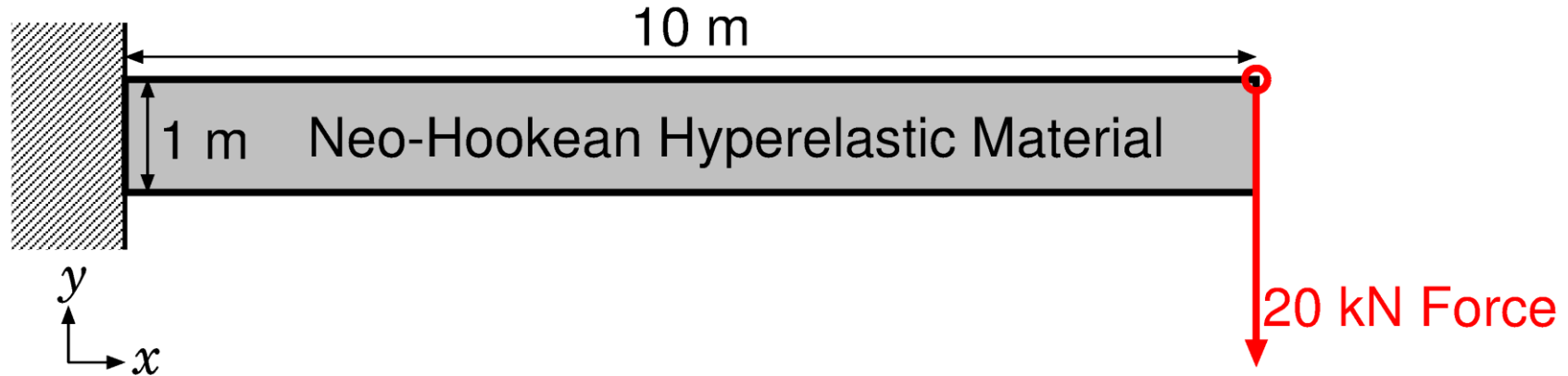


$[^{\text{Edge}}B]$ が出来上がった後の処理はES-FEMとほぼ同じ.  
⇒dev/volカップリングのある材料も扱える.



# 超弾性2D片持ち梁の曲げ解析

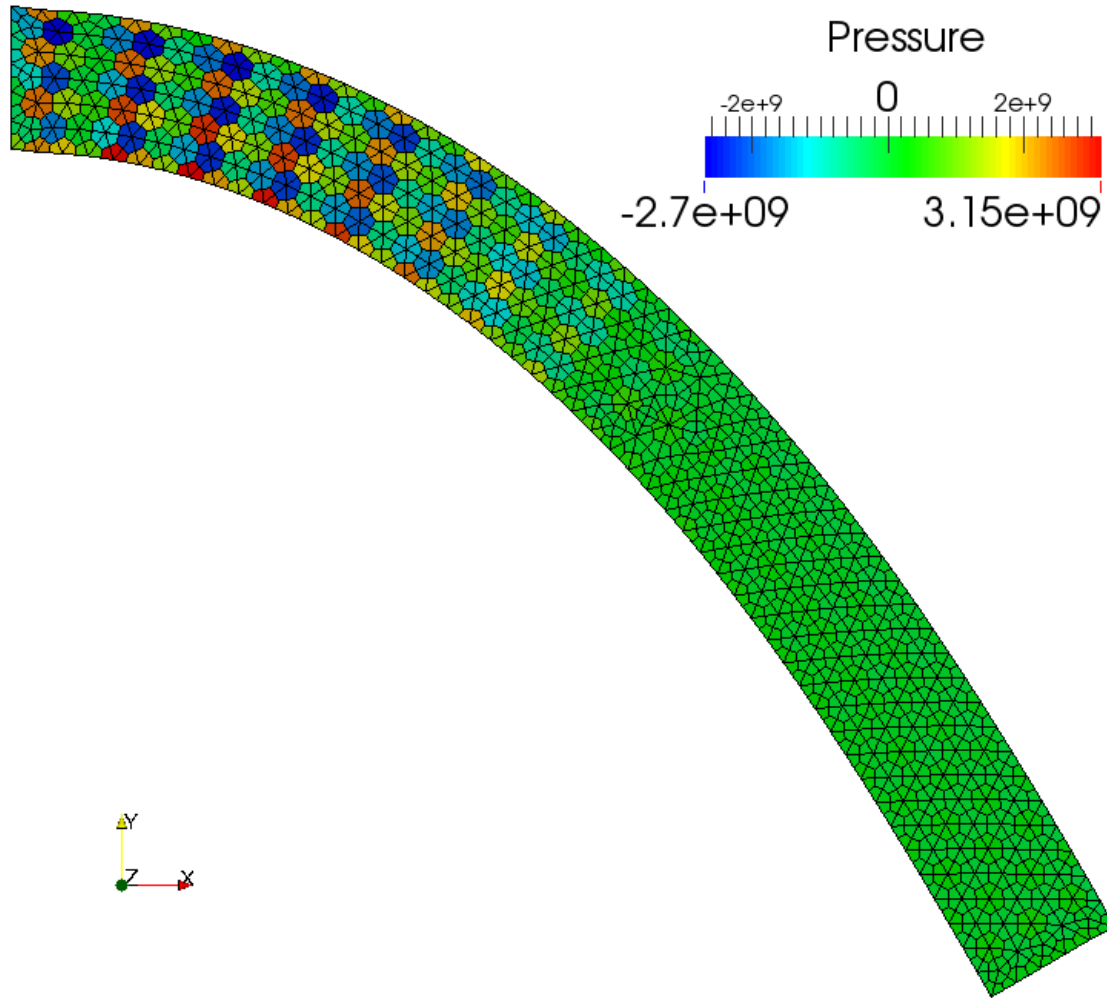
## 概要



- 平面ひずみ.
- 先端に下向き集中荷重を加える
- Neo-Hookean超弾性体  
(初期ポアソン比は0.499999)
- 大たわみ問題で**圧力振動**が無くなるかを検討.

# 超弾性2D片持ち梁の曲げ解析

## ES/NS-FEMの結果(圧力分布)

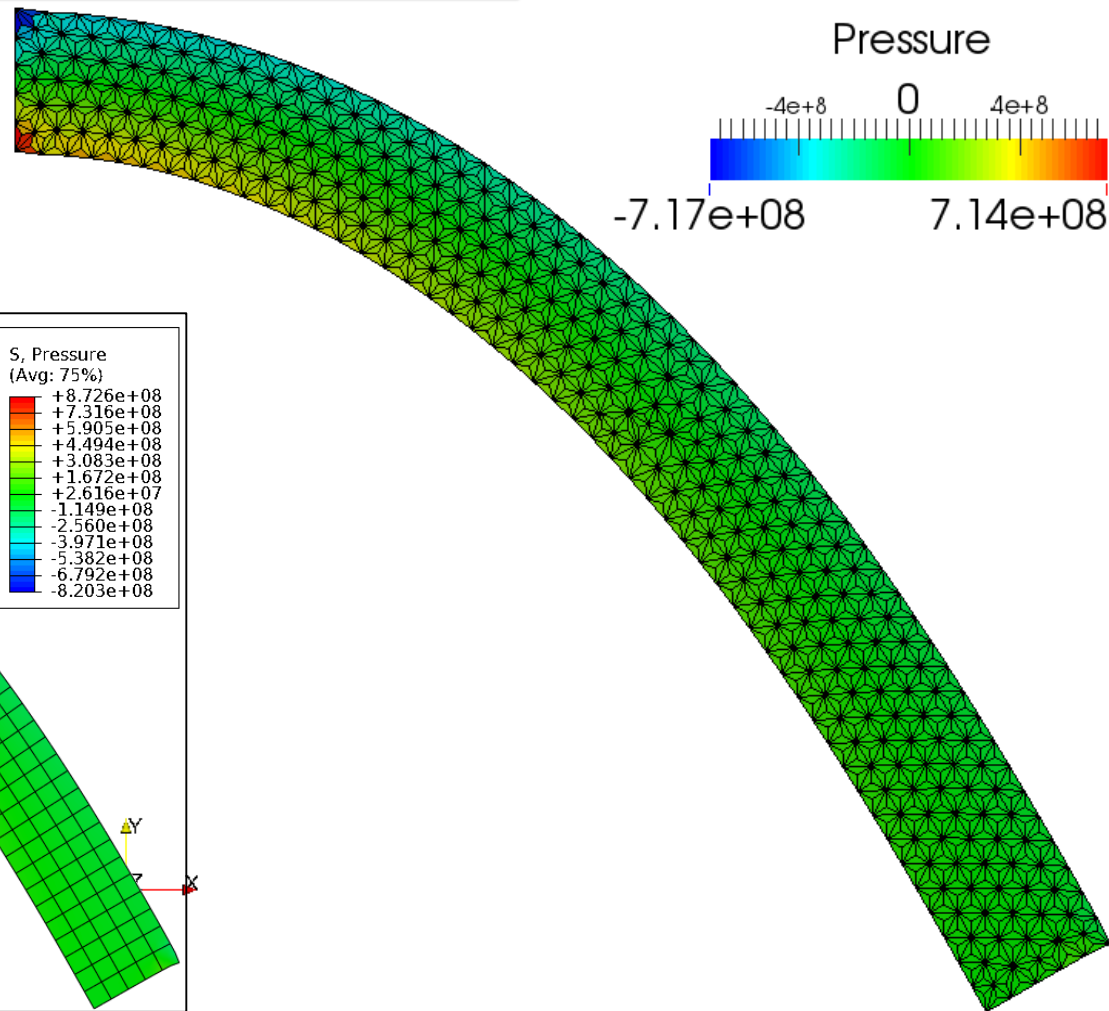


案の定，ロッキングはしていないが，圧力振動がある。

# 超弾性2D片持ち梁の曲げ解析

## bES-FEMの結果(圧力分布)

ABAQUS  
CPE8Hの解析結果



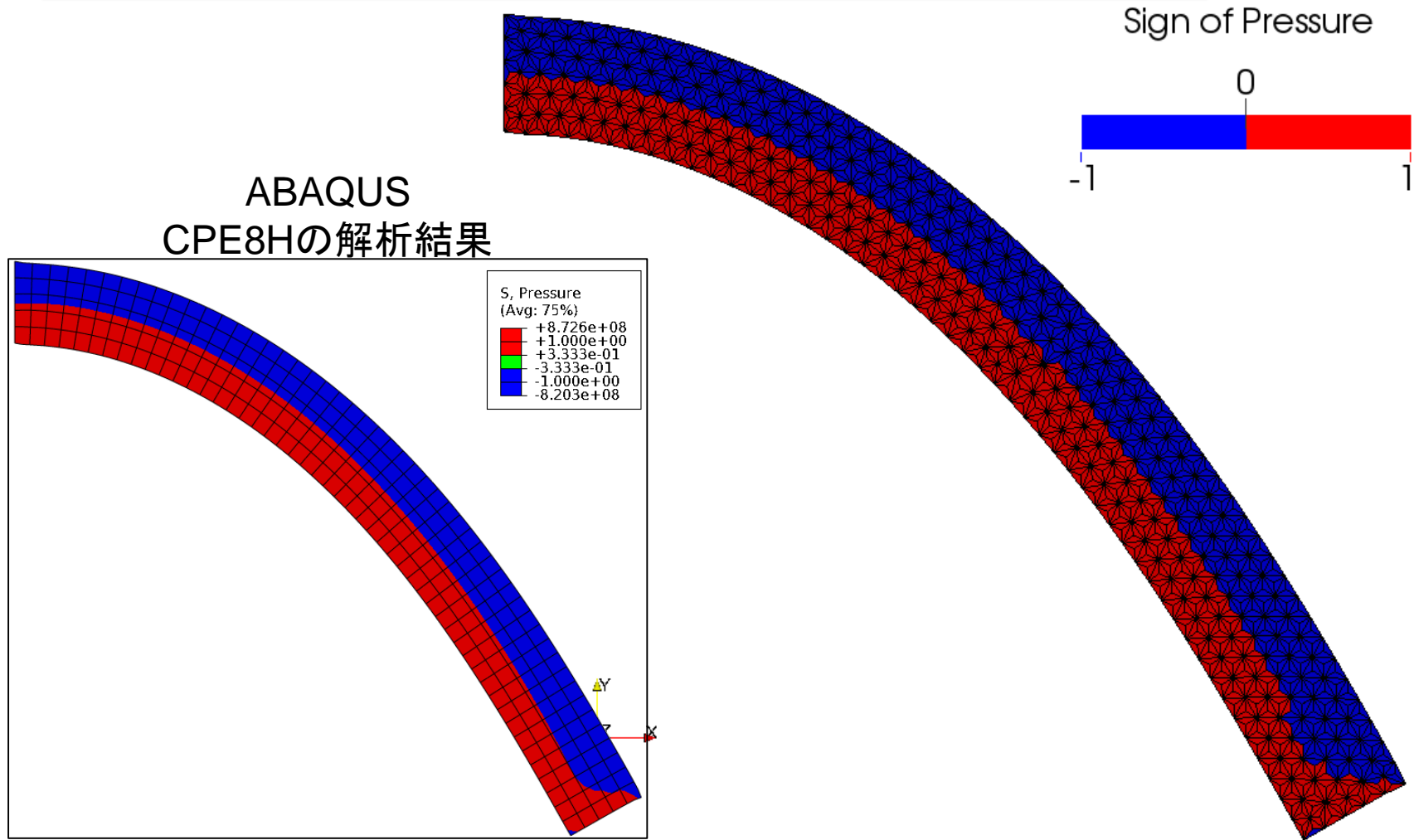
圧力振動が抑制されている!!



# 超弾性2D片持ち梁の曲げ解析

## bES-FEMの結果(圧力の符号の分布)

ABAQUS  
CPE8Hの解析結果

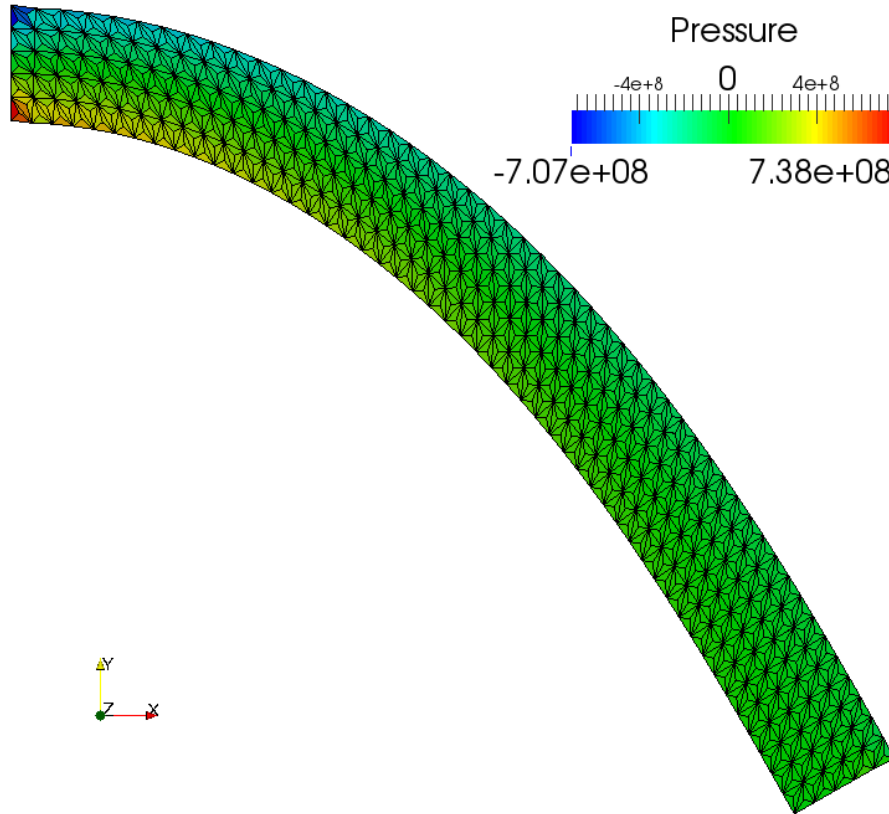


圧力振動が抑制されている!!

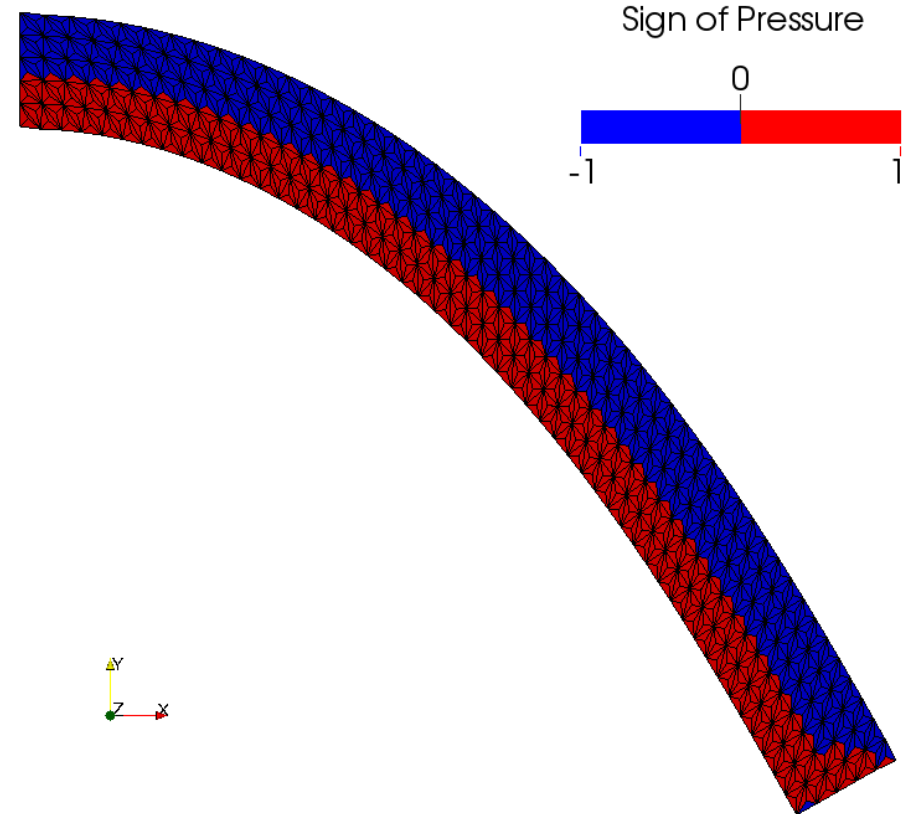
# 超弾性2D片持ち梁の曲げ解析

## 構造メッシュでのbES-FEMの結果

圧力



圧力の符号

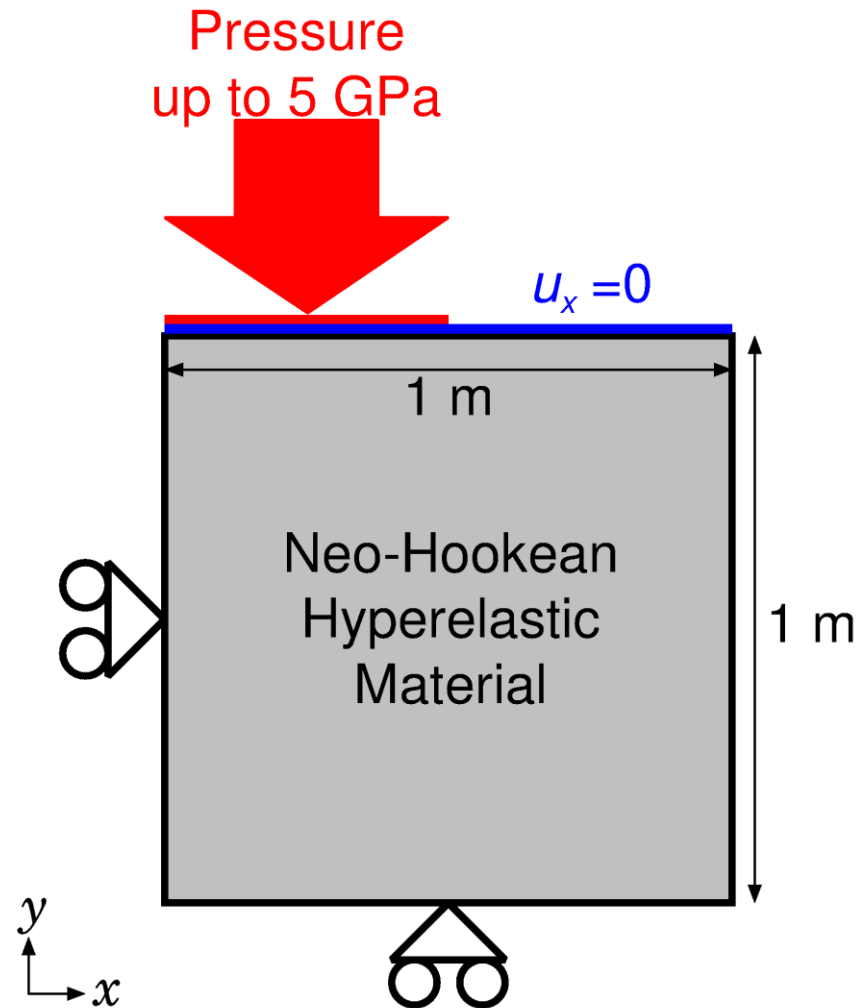


メッシュ依存性もない模様

# 超弾性2Dブロックの押込解析

## 概要

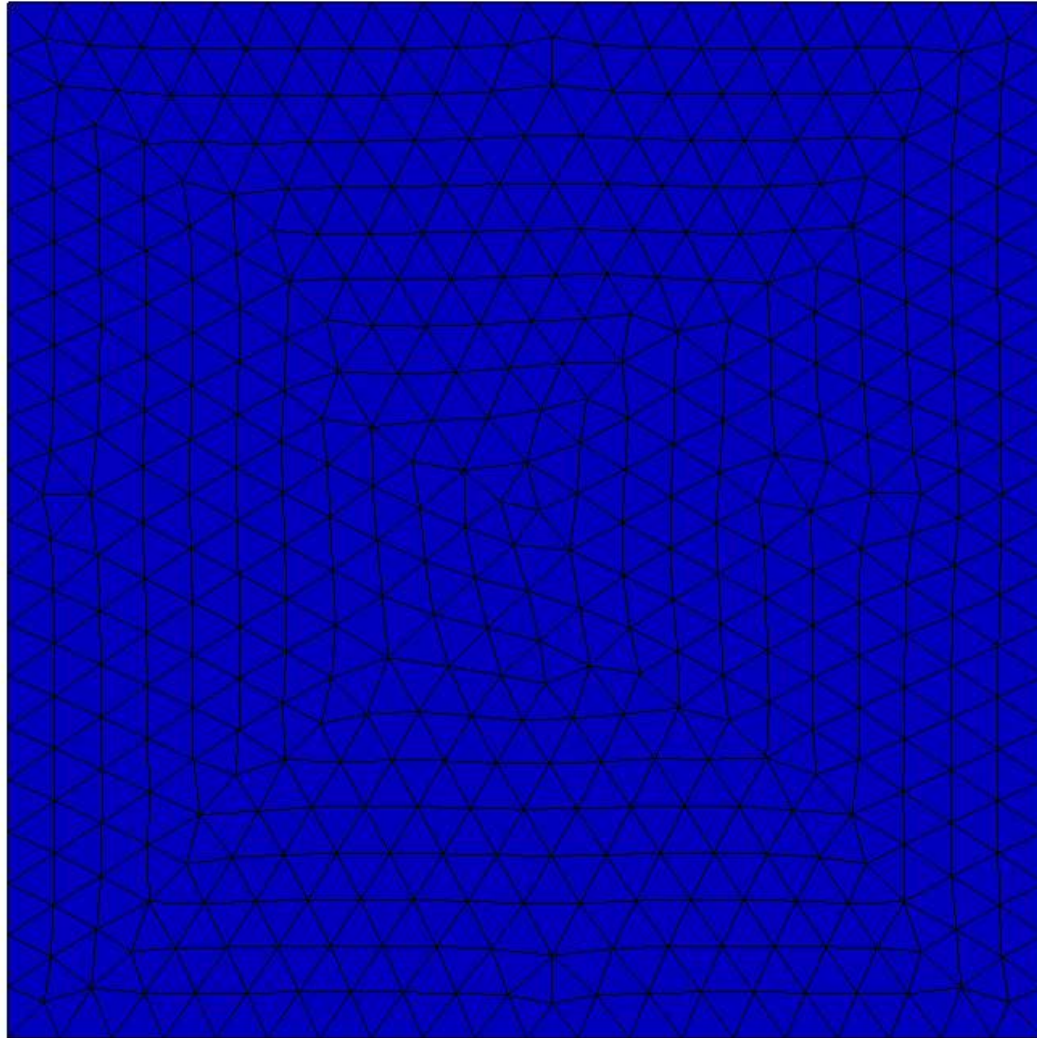
- 平面ひずみ.
- 左面をx方向拘束,  
下面をy方向拘束,  
上面をx方向拘束の上  
上面左半分に圧力荷重
- Neo-Hookean超弾性体  
( $\nu_{ini} = 0.499999$ ).
- 大ひずみ問題でも圧力  
振動がなくなるかを検討.



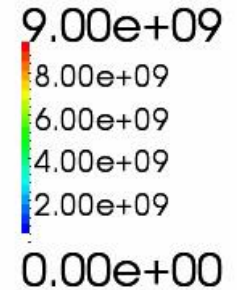


# 超弾性2Dブロックの押込解析

## ES/NS-FEMの結果 (Mises応力分布)

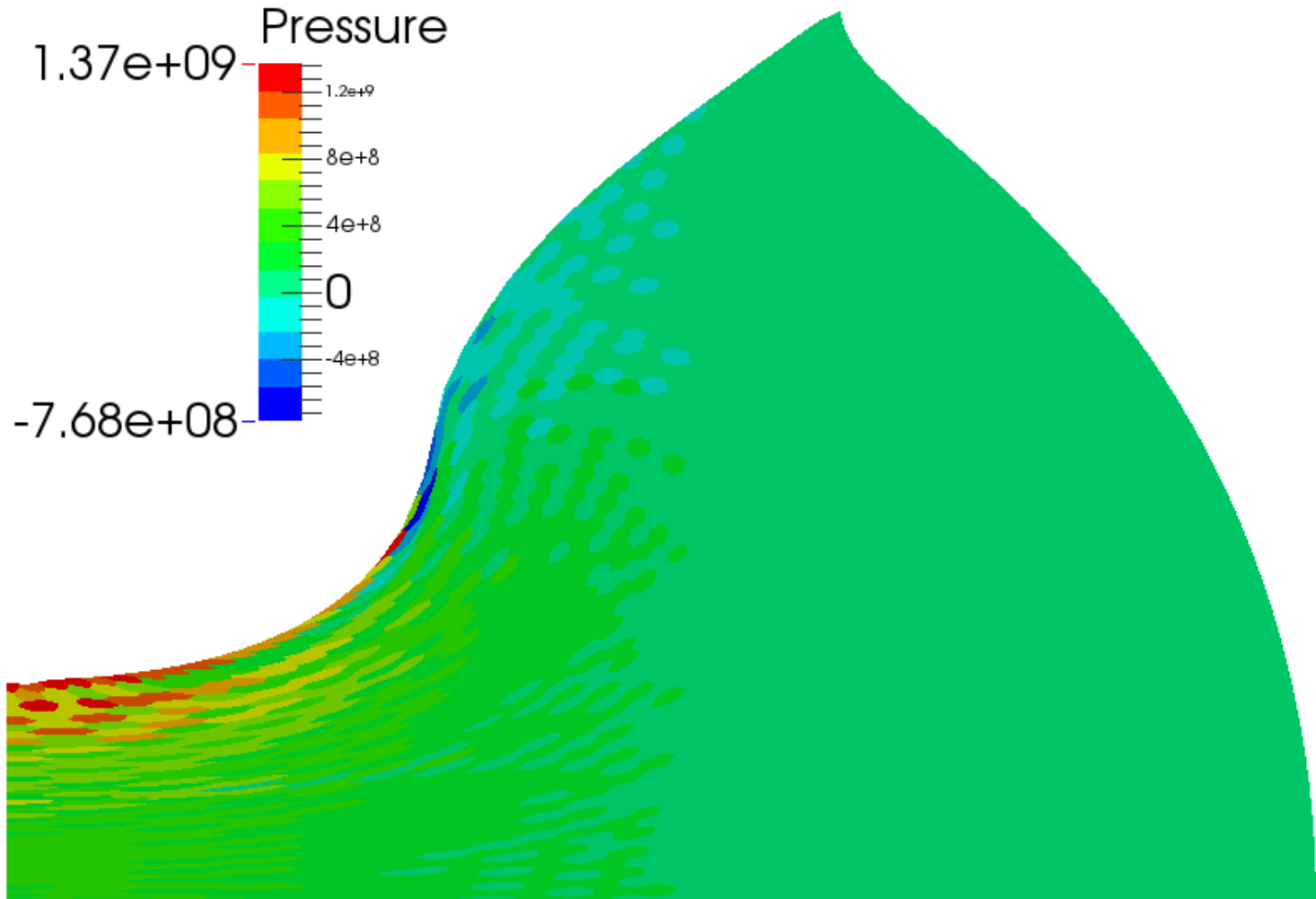


Mises Stress (Pa)



# 超弾性2Dブロックの押込解析

## ES/NS-FEMの結果(解析途中の圧力分布)

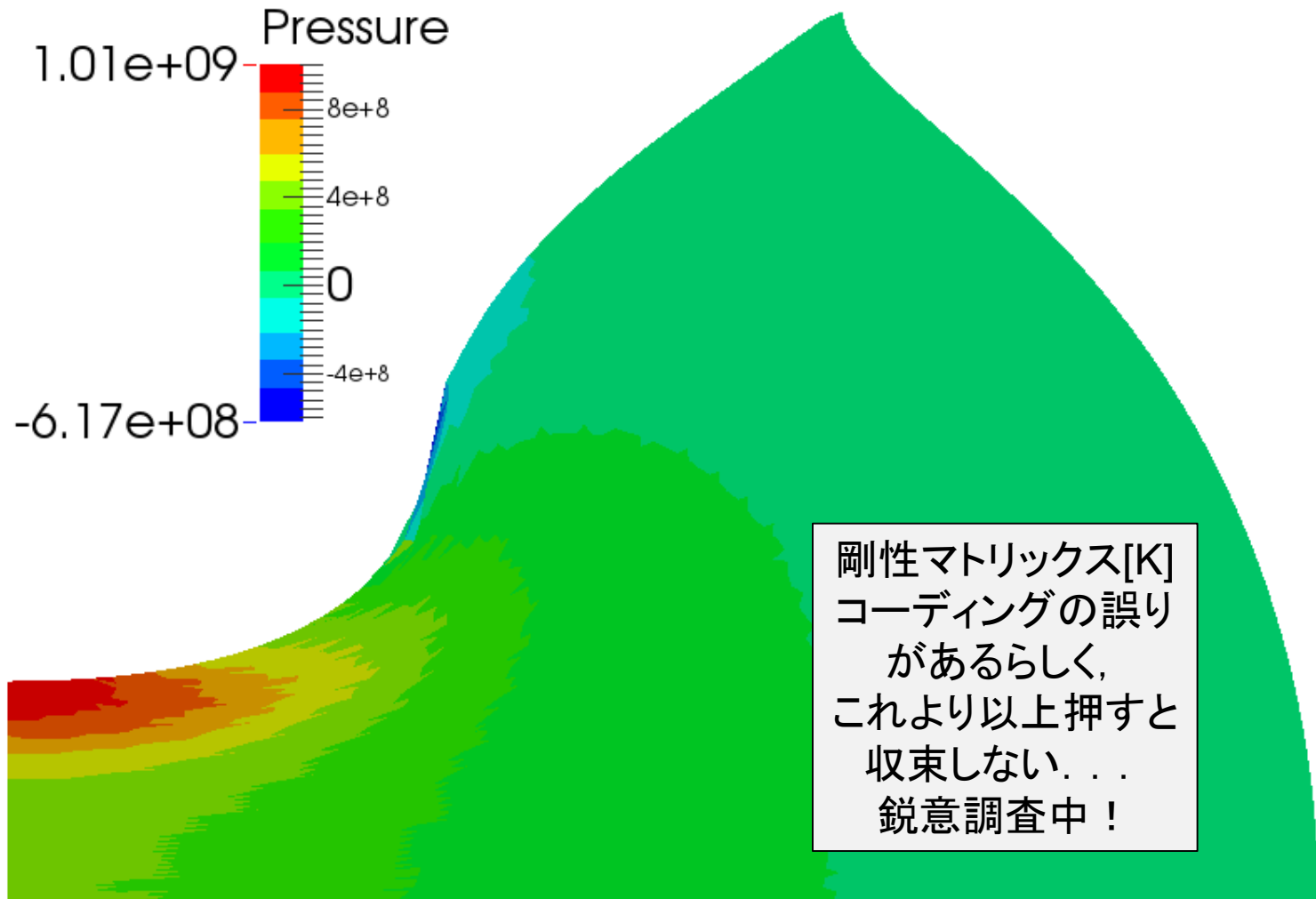


案の定, ロッキングはしていないが, 圧力振動がある.



# 超弾性2Dブロックの押込解析

## bES-FEMの結果(解析途中の圧力分布)



圧力振動が抑制されている!!



# まとめ

# 全体まとめ

- 四面体要素／三角形要素を用いた**最新のS-FEM**各種についてその性能を評価した.
- Selective S-FEMはいずれも**ロッキングフリー**であるものの、**圧力振動などの問題**が残されていることを明らかにした.
- 検討中の**bES-FEM**であれば上記の問題を解決できる可能性があることを簡単な例題で示した.

**bES-FEMに乞うご期待!!**  
ご清聴ありがとうございました.