

増分形釣合方程式に基づく
陰的有限要素解析による
大変形弾塑性リゾーニング解析

大西 有希, 天谷 賢治

東京工業大学



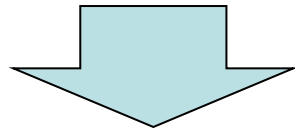
研究背景

- 柔らかい材料の静的超大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。

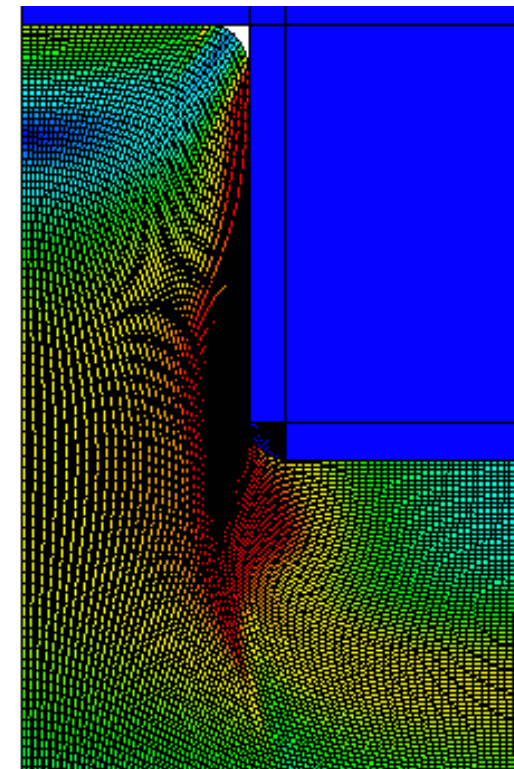
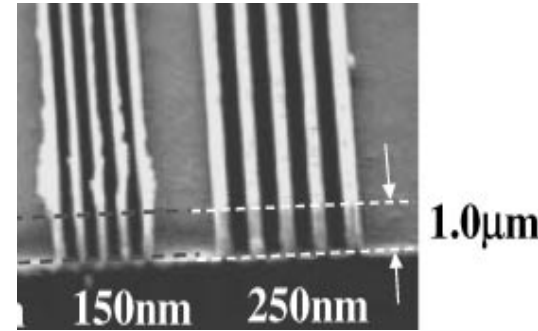
(最終目標: 成形解析

e.g. 熱ナノインプリント等)

- メッシュ固定のFEMを使用するとメッシュがすぐに潰れてしまい、解が得られない。



- **メッシュリゾーニング** (メッシュを何度も切り直して計算を続行すること) が不可欠。



従来のメッシュリゾーニング成形解析手法

	代表的なソフト	精度	安定性
ワンステップ法 (非FEM)	HyperForm FASTFORM	★	★★★★★
動的陽解法	LS-DYNA PAM-STAMP	★★★	★★★★
静的陽解法	ASU/P-form	★★★	★★★
静的陰解法	ABAQUS MARC	★★★★★	★

メッシュリゾーニング法に関する従来研究のほとんどは動的陽解法の精度向上

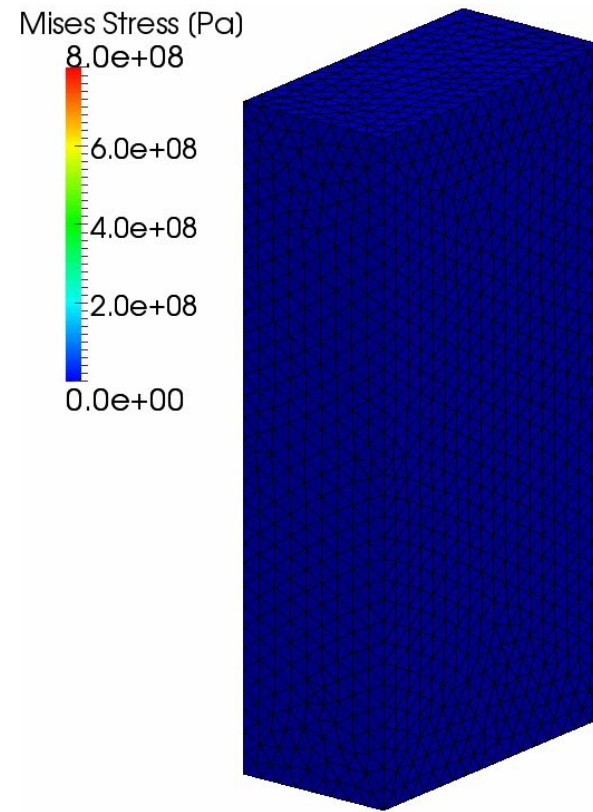
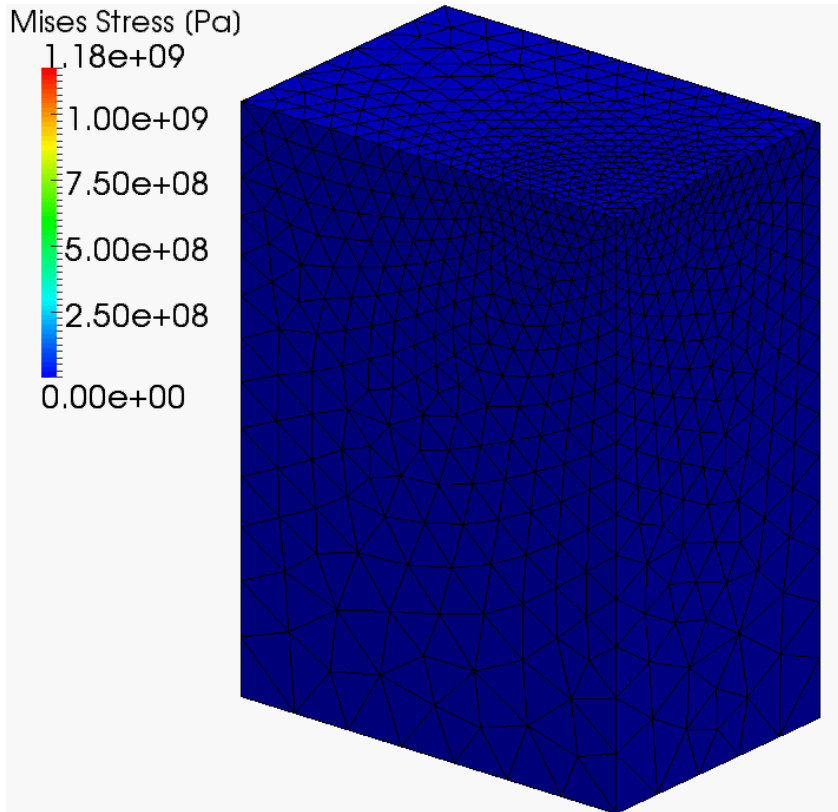
静的陰解法のメッシュリゾーニングの安定性向上を目指した研究はほとんどない

我々のアプローチ

解くべき方程式として増分形の陰的釣合方程式を採用.

$$(\{f^{\text{ext}}\} + \{\Delta f^{\text{ext}}\}) - (\{f^{\text{int}}\} + \{\Delta f^{\text{int}}\}) = \{0\}$$

⇒ 陰解法でもメッシュリゾーニングが安定する!!



弾性体および超弾性体に対して提案手法の有効性を示した

研究目的

ただし、**弾塑性体**などの非線形材料への適用がまだ、

増分形の陰的釣合方程式に基づく
陰解法メッシュリゾーニング法（提案手法）を
静的大変形**弾塑性**解析に適用し、
高精度かつ安定に解が得られることを示す

発表目次

- ① 提案手法のクイックレビュー
- ② 提案手法における**弾塑性体**の取扱い
- ③ 解析例
- ④ まとめ

①

提案手法のクイックレビュー

陰的釣合方程式の比較

【標準形】

$$\{f^{\text{ext}+}\} - \{f^{\text{int}+}\} = \{0\}$$

$$\{f^{\text{ext}+}\} = \sum_{s \in \mathbb{S}} \int_{\Gamma_s^+} [N^+]^T \{\underline{t}^+\} d\Gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} \rho^+ [N^+]^T \{g^+\} d\Omega,$$

$$\{f^{\text{int}+}\} = \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} [B_L^+]^T \{T^+\} d\Omega$$

【増分形】

$$(\{f^{\text{ext}}\} + \{\Delta f^{\text{ext}}\}) - (\{f^{\text{int}}\} + \{\Delta f^{\text{int}}\}) = \{0\}$$

$$\{\Delta f^{\text{ext}}\} = \sum_{s \in \mathbb{S}} \int_{\Gamma_s^+} [N^+]^T \{\Delta \underline{t}_t\} d\Gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} \rho^+ [N^+]^T \{\Delta g\} d\Omega,$$

$$\{\Delta f^{\text{int}}\} = \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} [B_N^+]^T \{\Delta \Pi_t^T\} d\Omega,$$

(導出過程は省略)



増分形陰的釣合方程式の特徴

- $\Delta t \rightarrow +0$ の極限において $\{\Delta \underline{t}_t\} \rightarrow \{0\}$ かつ $\{\Delta g\} \rightarrow \{0\}$ なので, $\{\Delta f^{\text{ext}}\} \rightarrow \{0\}$.
 - $\Delta t \rightarrow +0$ の極限において, 速度形構成式を用いれば $\{\Delta \Pi_t^T\} \rightarrow \{0\}$ なので, $\{\Delta f^{\text{int}}\} \rightarrow \{0\}$.
- ∴ $\Delta t \rightarrow +0$ の極限において「必ず」釣合式が成立する。
(リゾーニング後でも)

【増分形】

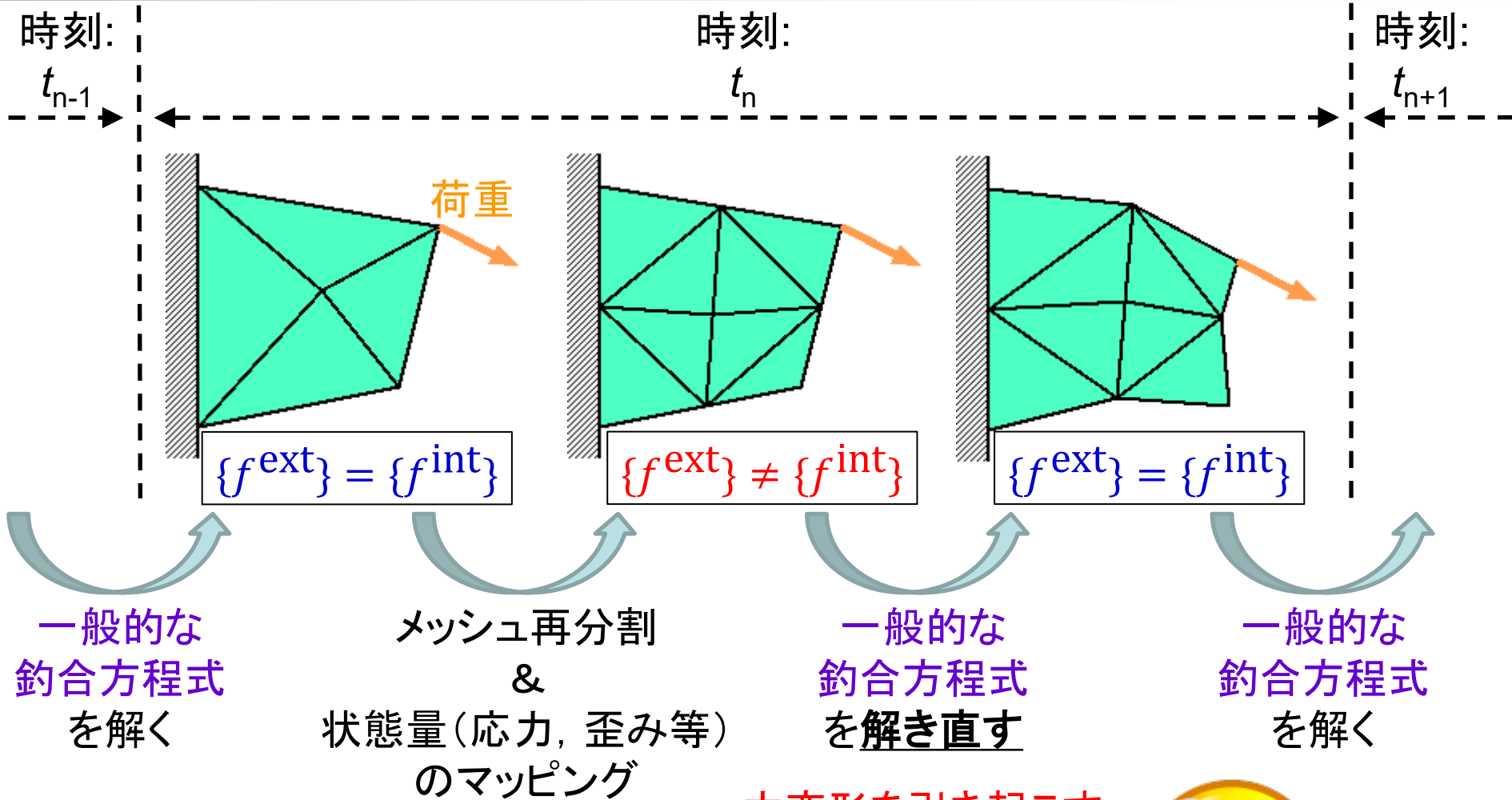
$$(\{f^{\text{ext}}\} + \{\Delta f^{\text{ext}}\}) - (\{f^{\text{int}}\} + \{\Delta f^{\text{int}}\}) = \{0\}$$

$$\{\Delta f^{\text{ext}}\} = \sum_{s \in \mathbb{S}} \int_{\Gamma_s^+} [N^+]^T \{\Delta \underline{t}_t\} d\Gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} \rho^+ [N^+]^T \{\Delta g\} d\Omega,$$

$$\{\Delta f^{\text{int}}\} = \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} [B_N^+]^T \{\Delta \Pi_t^T\} d\Omega,$$

(導出過程は省略)

標準的な陰解法メッシュリゾーニング



大変形を引き起こすため、収束不能に陥り易く、不安定.



提案する陰解法メッシュリゾーニング

時刻:

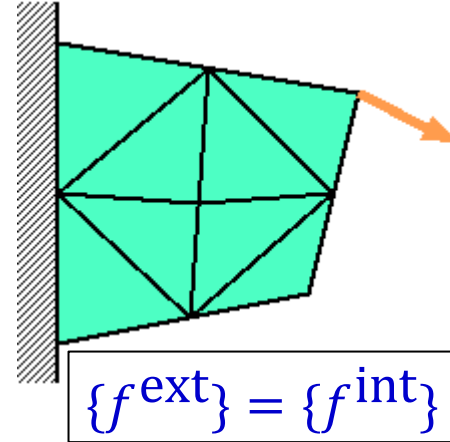
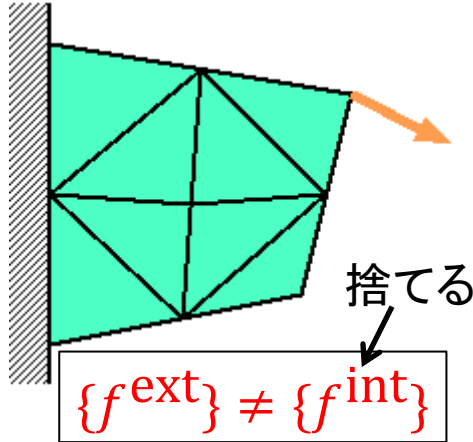
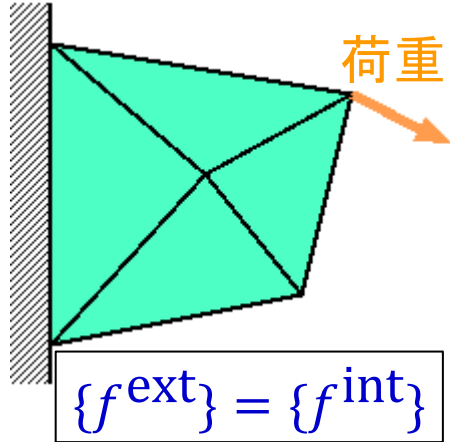
t_{n-1}

時刻:

t_n

時刻:

t_{n+1}



増分形
釣合方程式
を解く

メッシュ再分割
&
状態量(応力, 歪み等)
と $\{f^{ext}\}$ のマッピング

$\{f^{ext}\}$ を $\{f^{int}\}$
に代入

増分形
釣合方程式
を解く

提案手法に特徴的な処理

釣合を解き直す必要が
ないため、収束計算が
不要となり、安定。



提案手法のフローチャート

■ 時間増分計算ループ開始

- 初期 $\{\Delta u\}$ を仮定

● 陰解法のNewton-Raphsonループ開始

◆ 速度形構成式を用いた試行状態量の計算

◆ $\{\Delta f^{\text{ext}}\}$, $\{\Delta f^{\text{int}}\}$, $[K]$ の計算

◆ 収束判定

◆ $[K]\{\delta u\} = (\{f^{\text{ext}}\} + \{\Delta f^{\text{ext}}\}) - (\{f^{\text{int}}\} + \{\Delta f^{\text{int}}\})$ を解く

◆ $\{\Delta u\} + \{\delta u\}$ を $\{\Delta u\}$ に代入

● $\{f^{\text{ext}}\} + \{\Delta f^{\text{ext}}\}$ を $\{f^{\text{ext}}\}$ に代入

● $\{f^{\text{int}}\} + \{\Delta f^{\text{int}}\}$ を $\{f^{\text{int}}\}$ に代入

● 状態量の更新

● (必要ならば)リゾーニング

標準的な陰解法リゾーニング
とほとんど同じ。
緑色の部分が少し違うだけ。



SFEMの採用

要素タイプに起因する問題

リメッシングの際，任意の変形形状を持つ領域に対して高品質な四角形要素／六面体要素を生成することは現在不可能である．

⇒ 三角形要素／四面体要素を用いざるを得ない

しかし，三角形要素／四面体要素は容易にロッキングを引き起こす．

∴ ロッキングフリーな三角形要素／四面体要素が必要

提案手法では

Smoothed Finite Element Method (SFEM)

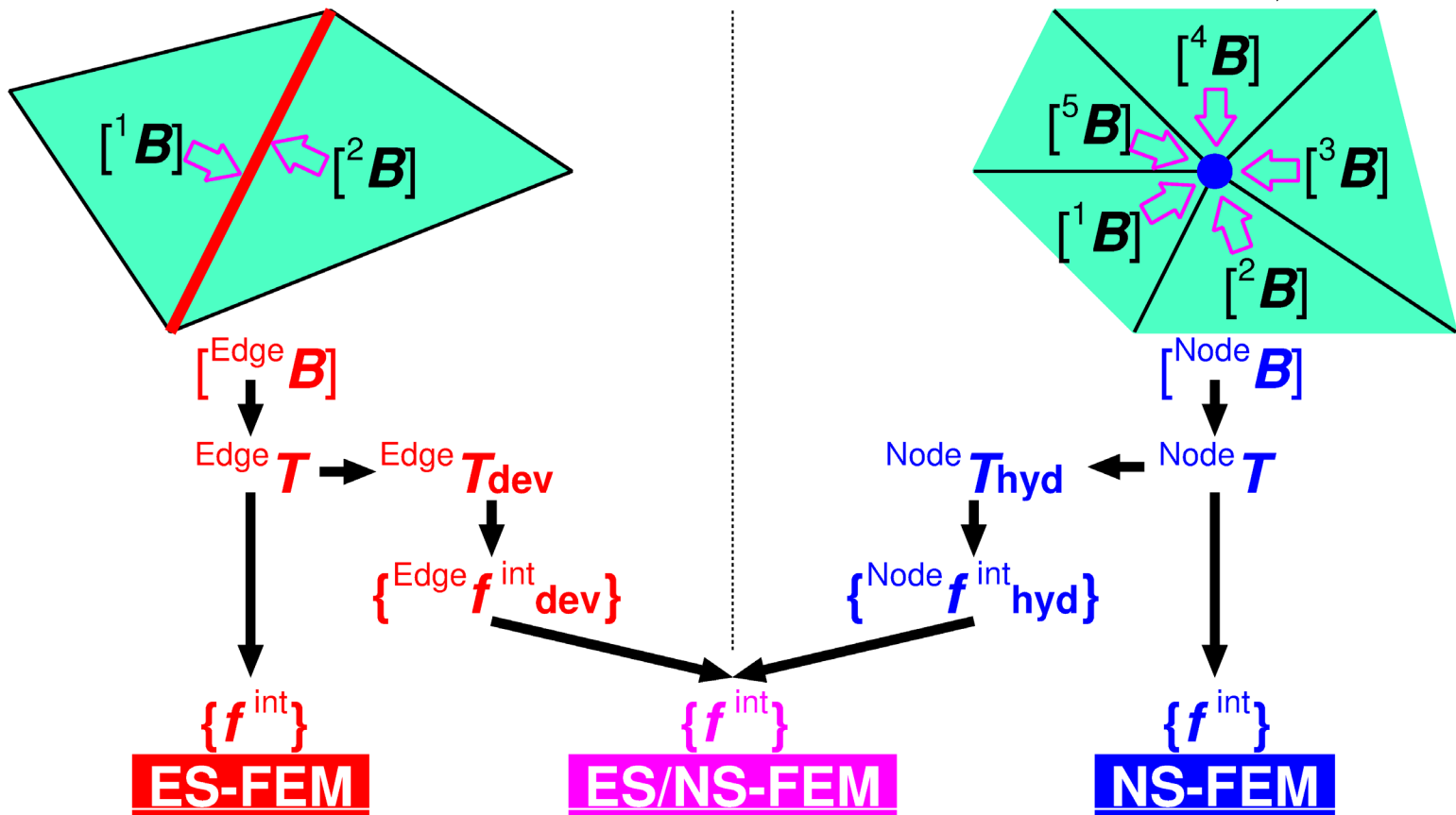
(正確にはES/NS-FEM or FS/NS-FEM)

を用いてこの問題を解決!!



ES/NS-FEMとは？

- 複数の要素にまたがってB-bar要素を作る様な方法.
- 要素は $[B]$ のみ計算し, それを**辺**(面)および**節点**に分配する.
- 応力歪みや節点内力寄与は**辺**(面)および**節点**で計算する.
- 三角形要素や四面体要素でもOK. ■ 混合法より実装が楽.



②

提案手法における弾塑性体の取扱い

速度形構成式を採用する
標準的な陰解法リゾーニングと
恐らく同じです。



弾塑性構成方程式

最も基本的な等方硬化von Mises弾塑性モデルを対象
(ABAQUSやMARCのデフォルトの弾塑性モデル)

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E}_{el} \iff \mathbf{\dot{T}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}_{el}$$

\mathbf{T} : Cauchy 応力テンソル

$\mathbf{\dot{T}}$: Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度

\mathbf{C} : 弾性テンソル

\mathbf{E}_{el} : Hencky(対数) 歪みテンソルの弾性成分

\mathbf{D}_{el} : ストレッチングテンソルの弾性成分

提案手法では**速度形構成式**
を採用する必要がある

相当塑性歪み増分の計算法

標準的な陰解法と同様，相当塑性歪み増分 (Δe_{pl}) を Elastic Predictor - Plastic Corrector法により計算する。(陽解法の最大の欠点である「r-min法」を用いる必要がない。)

解くべき方程式

$$H(e_{pl}^+) = 3G \text{Equ}(\mathbf{E}_{el}^+)$$

$$\iff H(e_{pl} + \Delta e_{pl}) = 3G(\text{Equ}(\hat{\mathbf{E}}_{el}^+) - \Delta e_{pl})$$

H : 降伏曲線

G : 横弾性率

Equ : 相当歪み関数

$\hat{\mathbf{E}}_{el}^+$: 試行全歪み増分が全て弾性歪み増分

であると仮定した場合の試行弾性歪み

方程式の解法は
Newton-Raphson法

これは標準的な
陰解法と完全に同じ



応力歪み状態の更新

■ 塑性進行時 ($\Delta e_{pl} > 0$) の場合

$$e_{pl}^+ = e_{pl} + \Delta e_{pl},$$

$$\mathbf{E}_{pl}^+ = \mathbf{R}^+ \mathbf{E}_{pl} \mathbf{R}^{+T} + \frac{3G\Delta e_{pl}}{H(e_{pl}^+) + 3G\Delta e_{pl}} \text{Dev}(\hat{\mathbf{E}}_{el}^+),$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{el}\Delta t = \bar{\mathbf{D}}\Delta t - \bar{\mathbf{D}}_{pl}\Delta t$$

$$= \bar{\mathbf{D}}\Delta t - \mathbf{R}^{-T} \left(\frac{3G\Delta e_{pl}}{H(e_{pl}^+) + 3G\Delta e_{pl}} \text{Dev}(\hat{\mathbf{E}}_{el}^+) \right) \mathbf{R}^{-},$$

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{R}^+ \mathbf{T} \mathbf{R}^{+T} + \mathbf{R}^{-} (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{D}}_{el}\Delta t) \mathbf{R}^{-T}.$$

Dev : 偏差歪み関数

\mathbf{R}^+ : 時間増分による剛体回転を表す回転テンソル

\mathbf{R}^- : \mathbf{R}^+ の半分の回転を表す回転テンソル

$\bar{\mathbf{D}}$: は時間増分中の平均ストレッチングテンソル ($\Delta e_{pl} < 0$ の場合については省略)

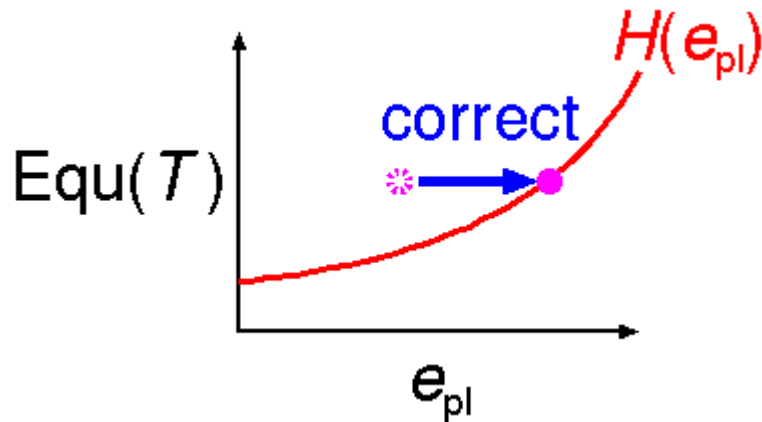
これは速度形構成式
を採用する標準的な
陰解法と恐らく同じ

(剛性マトリクスについても恐らく同じなので省略)

リゾーニング時の追加的処理

弾性体の場合の処理に加えて下記の処理を行う。

1. 相当塑性歪み (e_{pl}) と塑性歪み (E_{pl}) も他の状態量と同様にマッピングを行う。
2. マッピング後の弾性歪みから計算される相当応力がマッピング後の相当塑性歪みにおける降伏応力を超えている場合、弾性歪みから得られる応力が降伏曲線上に位置するように相当塑性歪みを補正する。



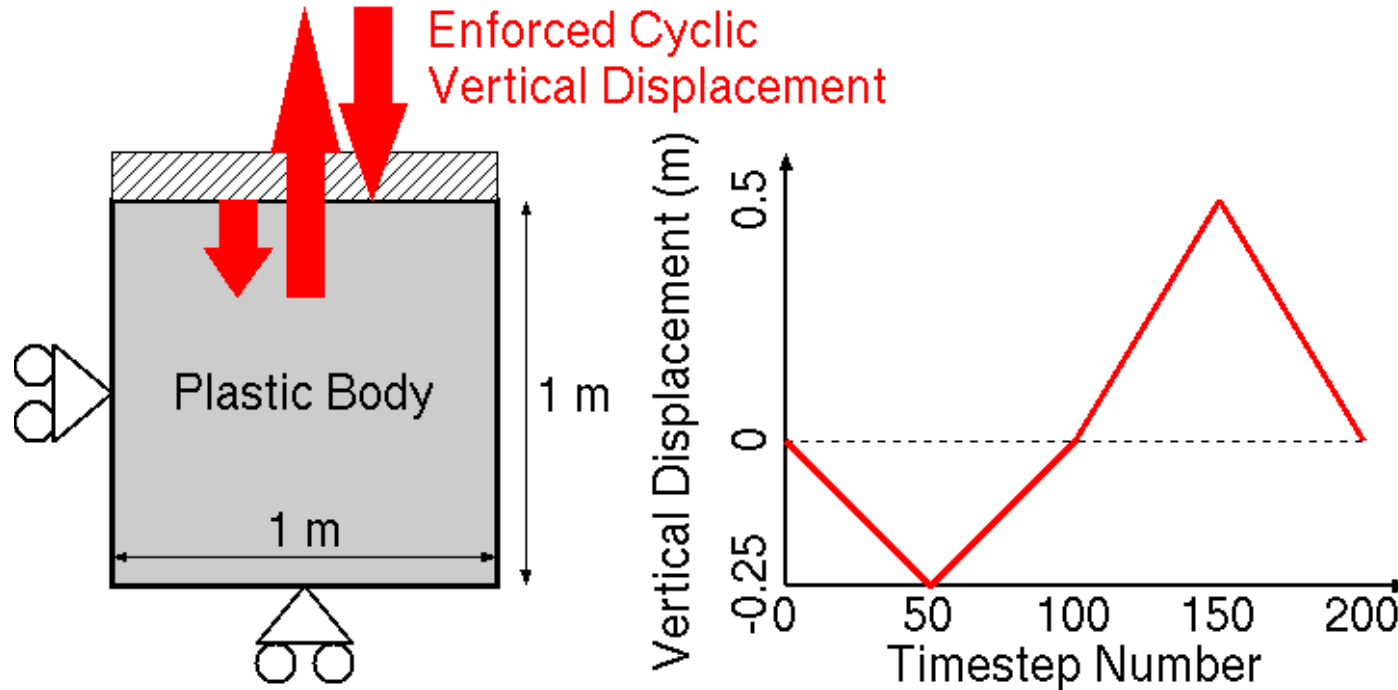
相当塑性歪みの時間的連続性を犠牲にする代わりに、応力歪み状態の破綻を防いでいる。

これも、標準的な陰解法
リゾーニングと恐らく同じ

③

解析例

繰返し変形解析(概要)

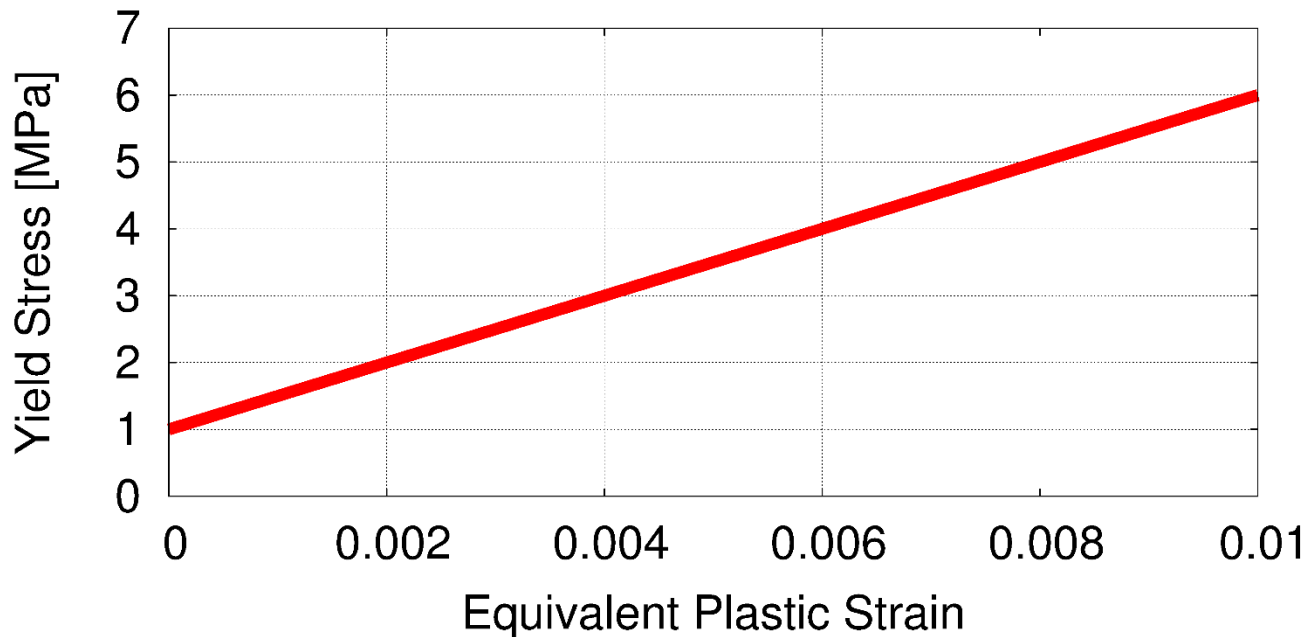


- 静的, 平面ひずみ, 1 m x 1 mの正方領域
- 左辺を左右拘束, 下辺を上下拘束
- 上辺を左右拘束 & 上下に繰返し強制変位
- 10時間ステップ毎にリゾーニング (GAMBITを使用)
- 三角形要素をES/NS-FEMで使用

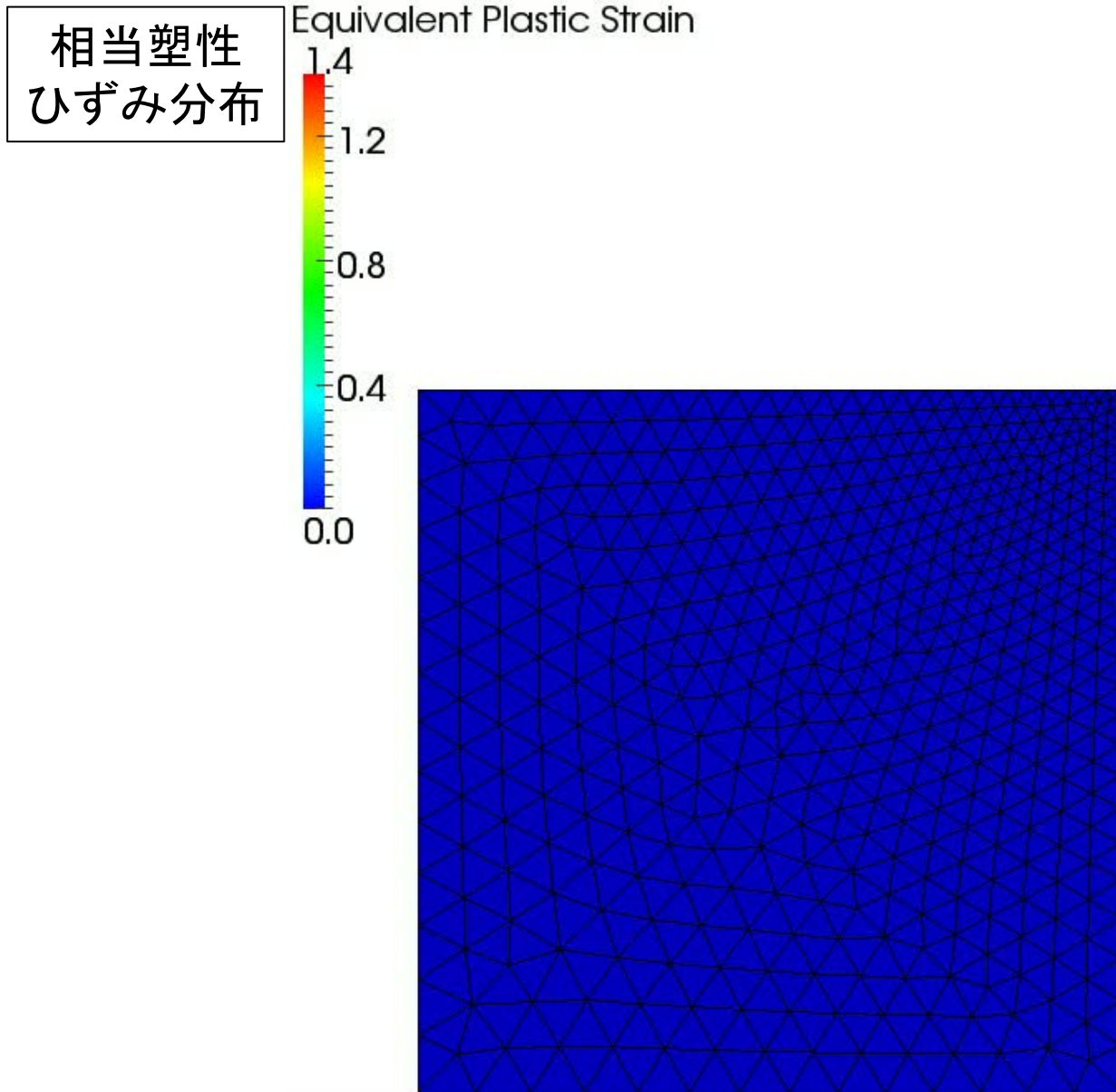
繰返し変形解析(弾塑性材料モデル)

■ 等方硬化 von Misesモデル

- ヤング率: 1 GPa
- ポアソン比: 0.3
- 降伏曲線: 降伏応力: 1 MPa, 塑性係数: 0.5 GPa



繰返し変形解析(解析結果)



多数回の
リゾーニング
を行った後も
滑らかに変形

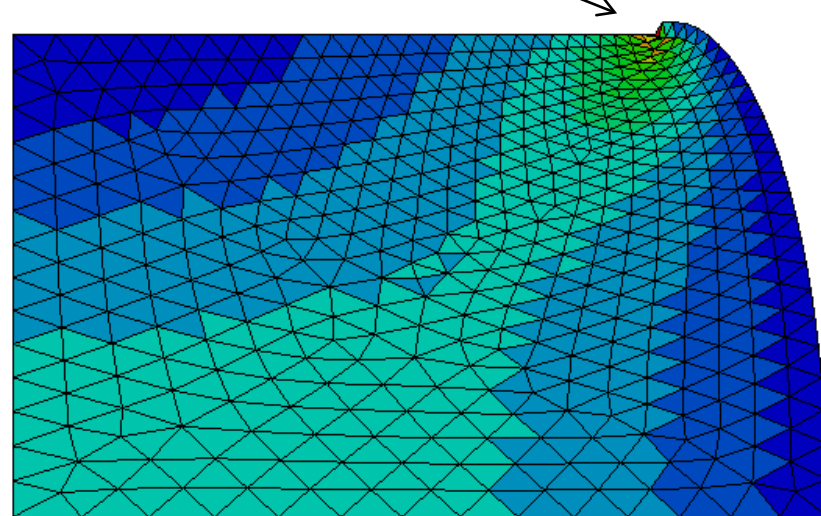
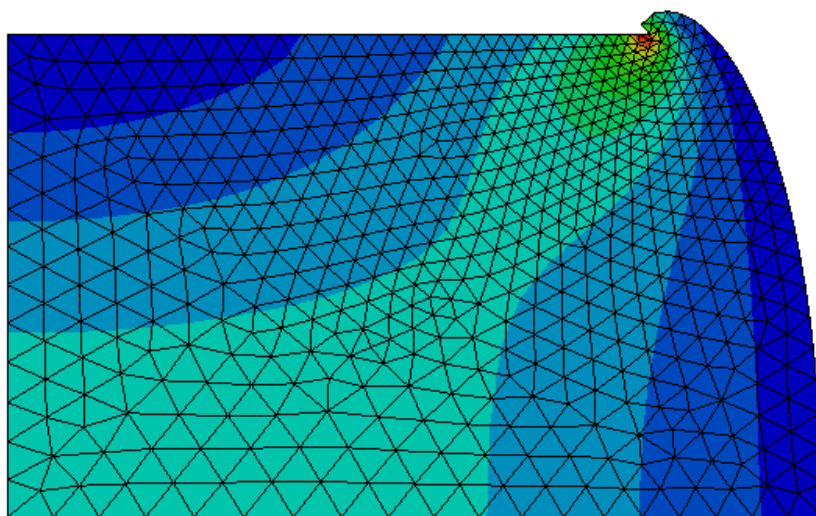


安定した
リゾーニング
を実現!!



繰返し変形解析(比較)

Equivalent Plastic Strain



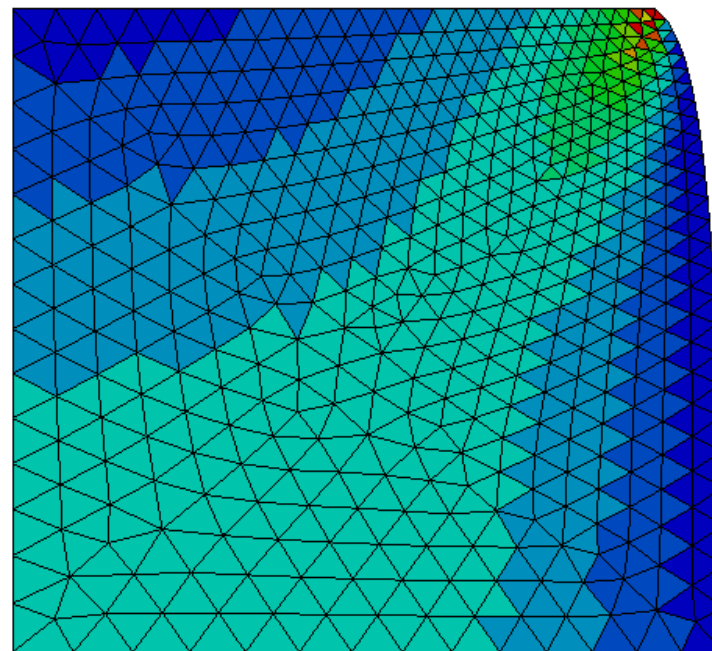
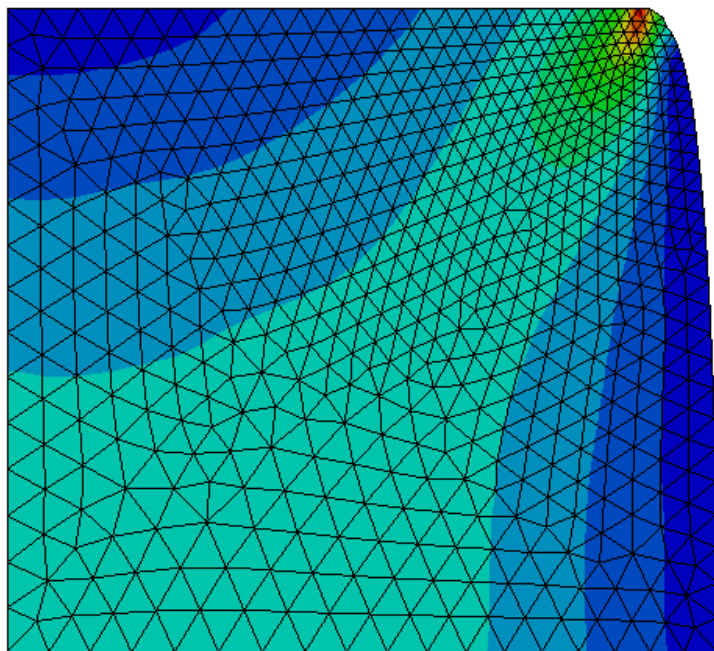
提案手法(リゾーニング有り)

標準手法(リゾーニング無し)

Timestep: 50

繰返し変形解析(比較)

Equivalent Plastic Strain



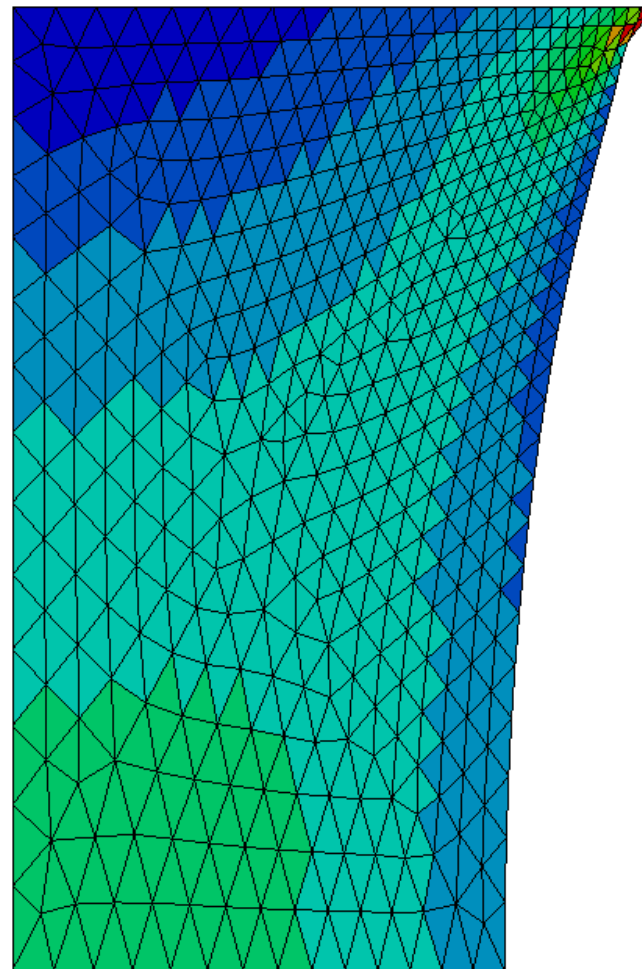
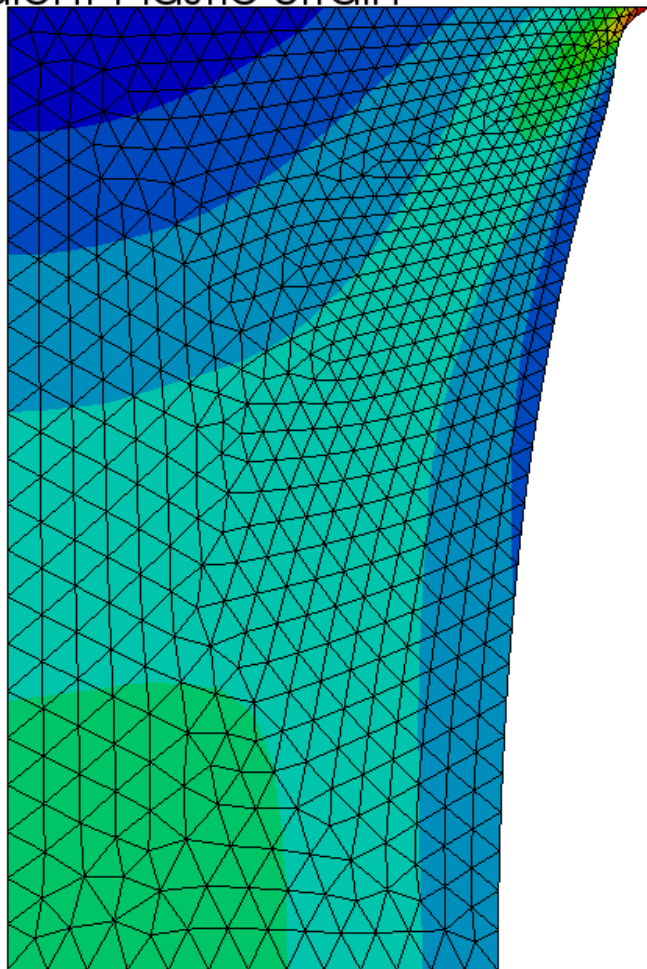
提案手法(リゾーニング有り)

標準手法(リゾーニング無し)

Timestep: 100

繰返し変形解析(比較)

Equivalent Plastic Strain



提案手法(リゾーニング有り)

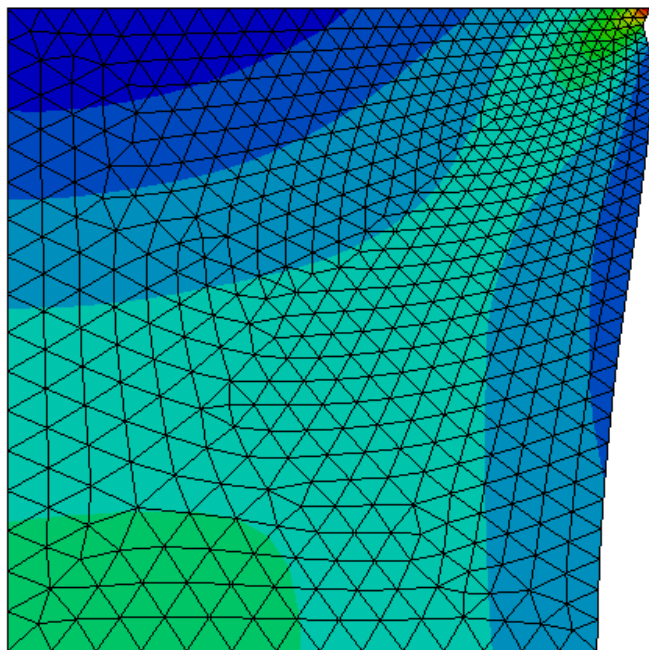
標準手法(リゾーニング無し)

Timestep: 150

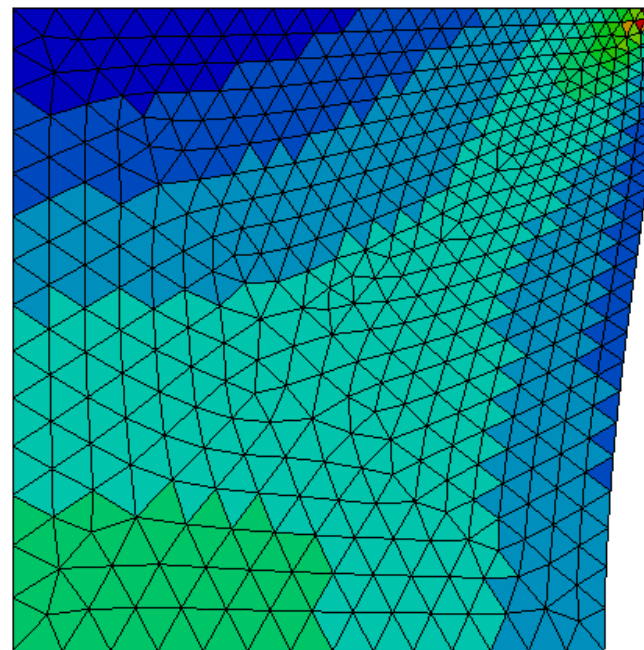


繰返し変形解析(比較)

Equivalent Plastic Strain



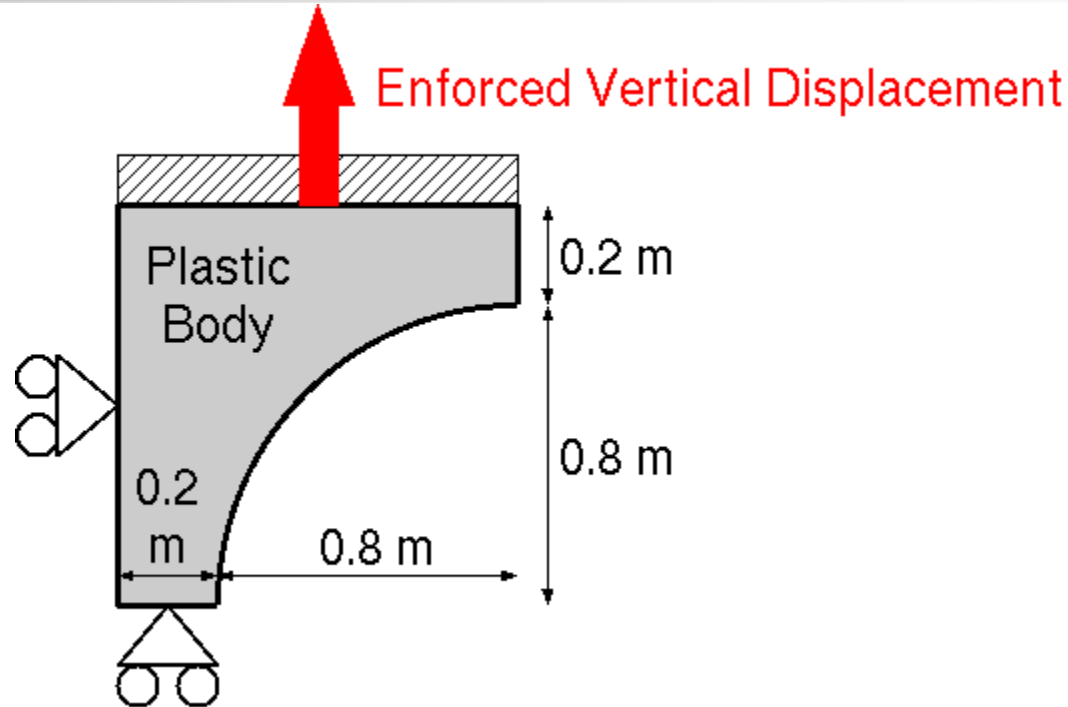
提案手法(リゾーニング有り)



標準手法(リゾーニング無し)

Timestep: 200

ネッキング解析 (概要)

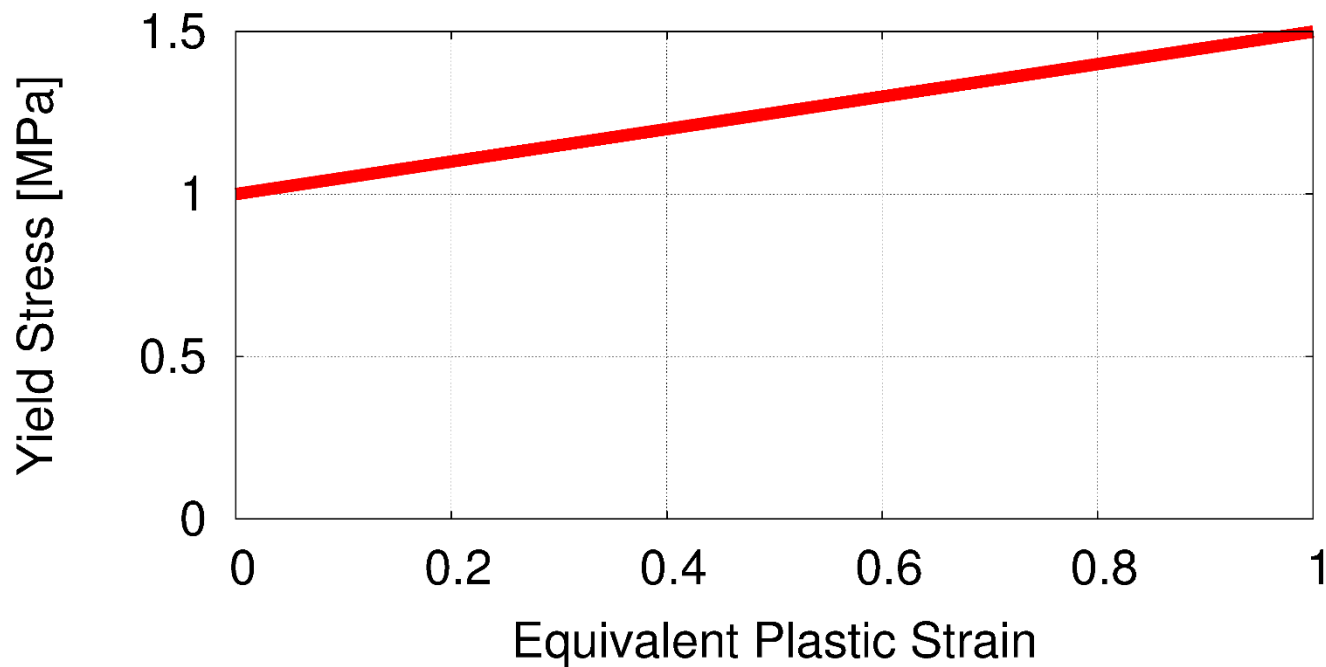


- 静的, 平面ひずみ, 引張試験片の1/4領域
- 左辺を左右拘束, 下辺を上下拘束
- 上辺を左右拘束 & 上方向に強制変位
- 0.05 m変位毎にリゾーニング (GAMBITを使用)
- 三角形要素をES/NS-FEMで使用

ネッキング解析 (弾塑性材料モデル)

■ 等方硬化 von Misesモデル

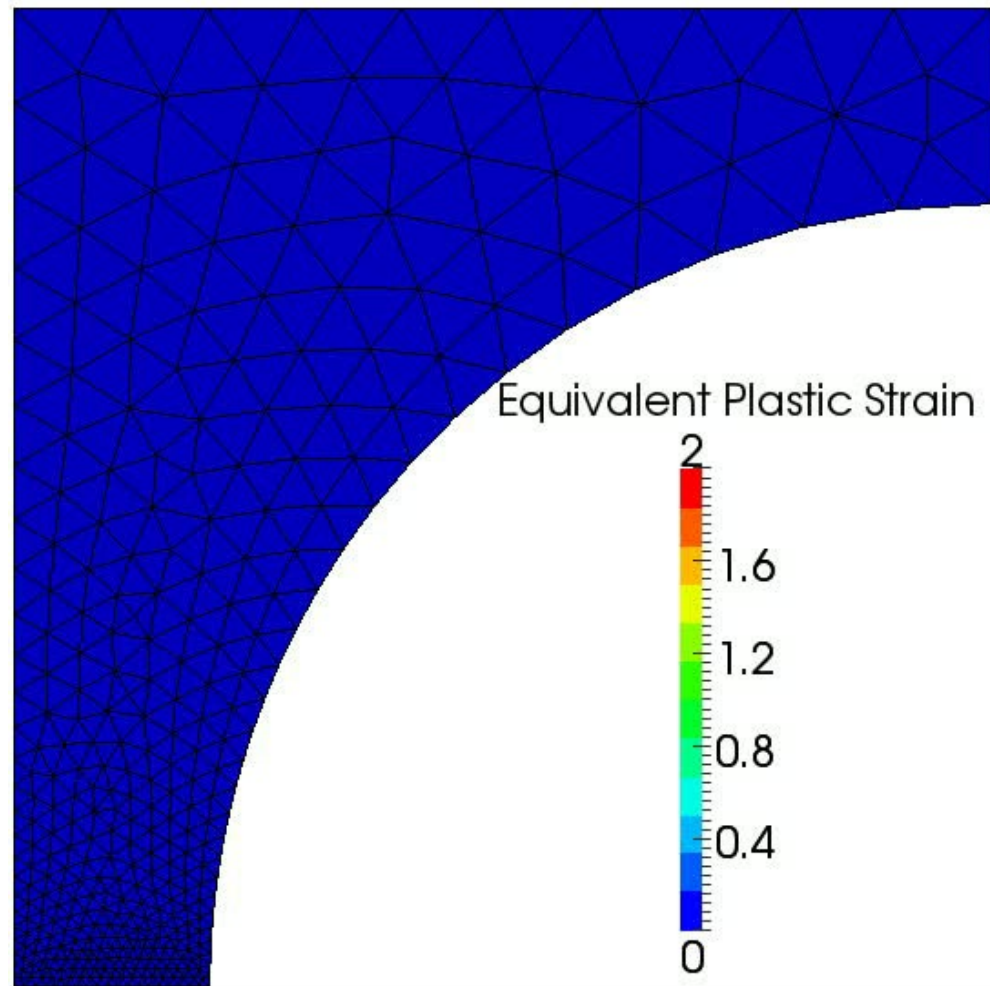
- ヤング率: 1 GPa
- ポアソン比: 0.3
- 降伏曲線: 降伏応力: 1 MPa, 塑性係数: 0.5 MPa



弾完全塑性体
に近い

ネッキング解析(解析結果)

相当塑性
ひずみ分布



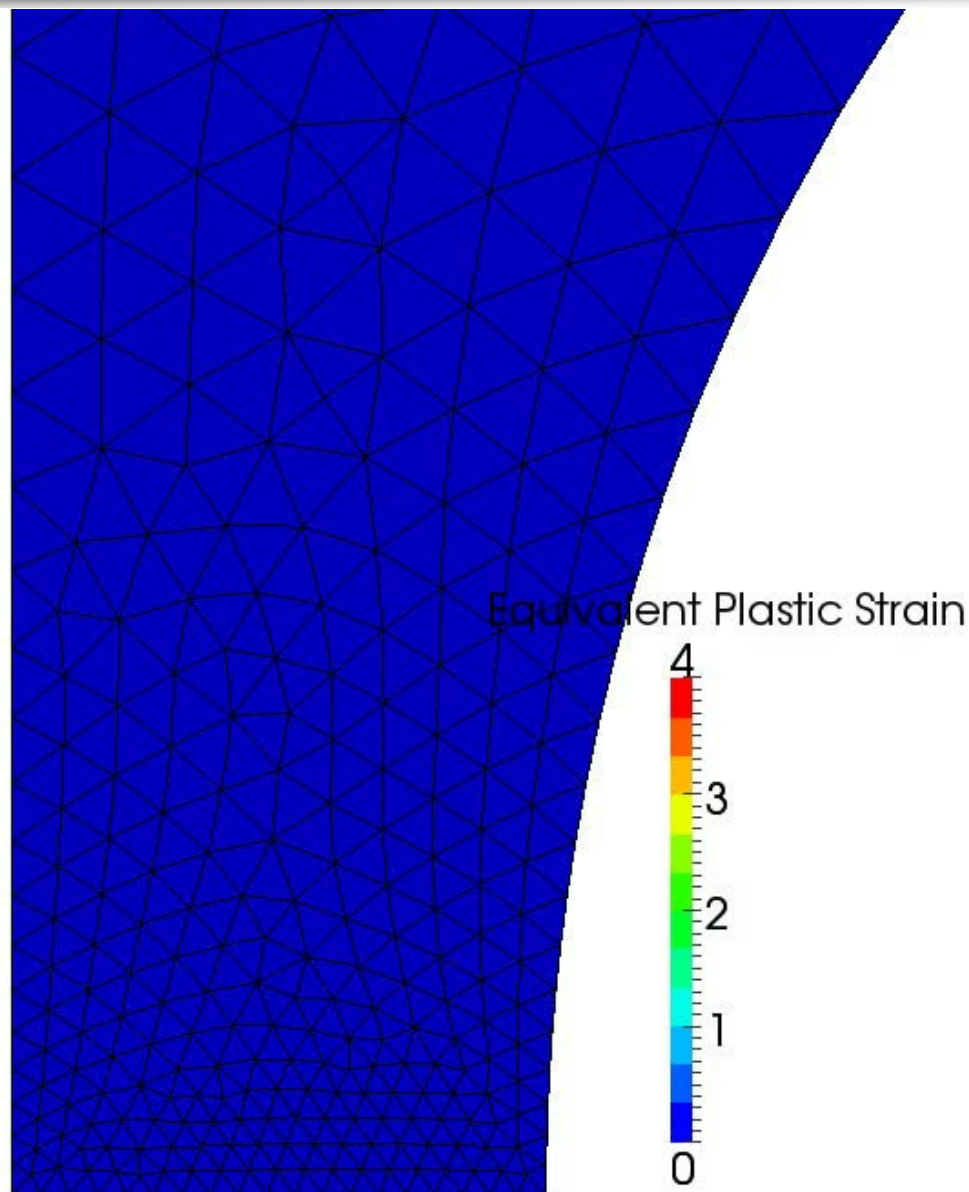
多数回の
リゾーニング
を経て**妥当な
ネッキング**を
示している。

ただし、
リメッシュの
粗密制御が
お粗末...



ネッキング解析 (解析結果の拡大表示)

相当塑性
ひずみ分布



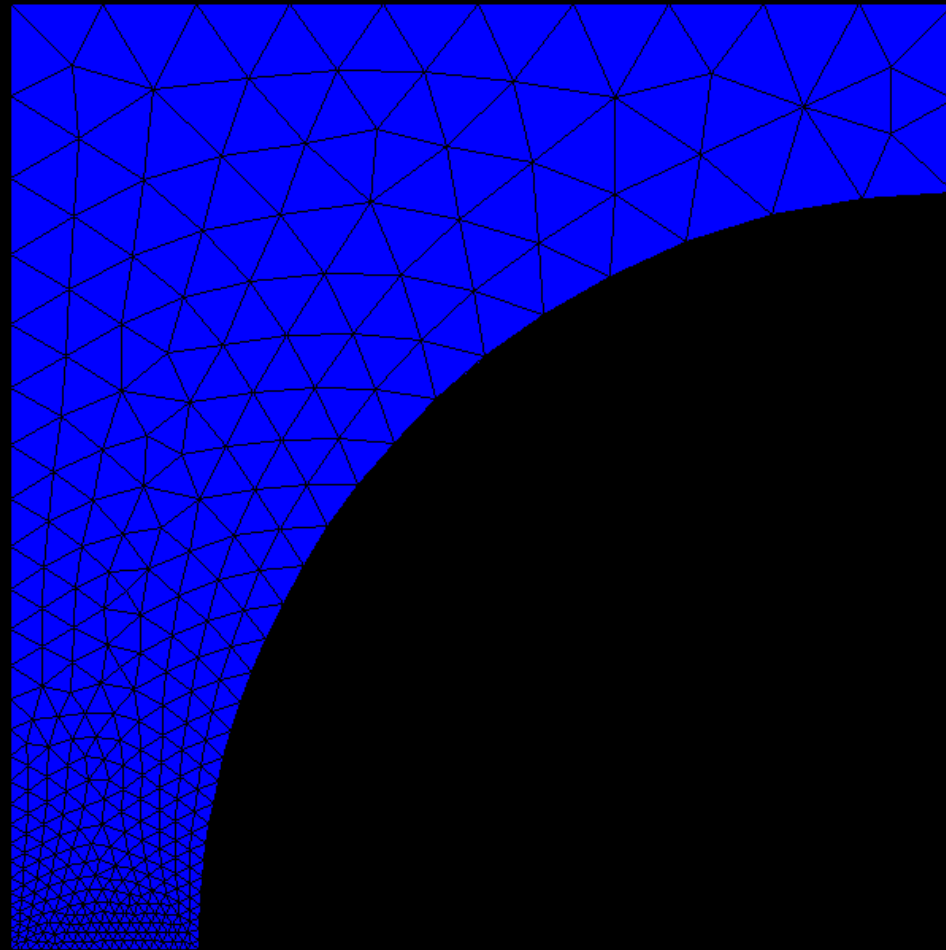
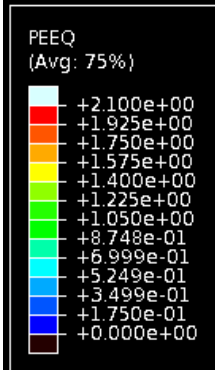
多数回の
リゾーニング
を経て**妥当な
ネッキング**を
示している。

ただし、
リメッシュの
粗密制御が
お粗末...



ネッキング解析 (ABAQUSの場合)

相当
塑性
ひずみ
分布



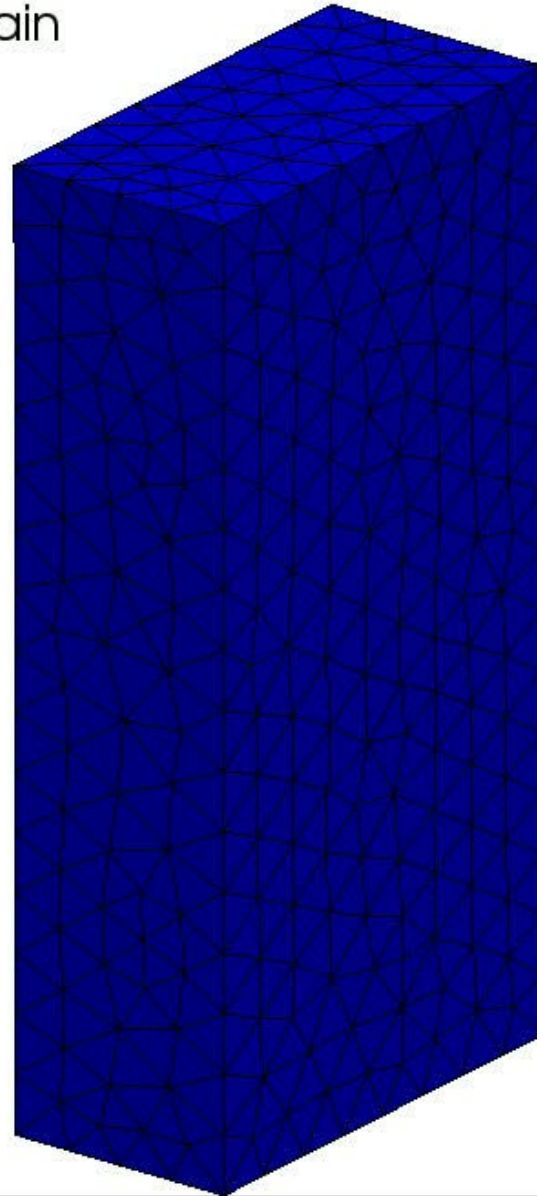
変形挙動が
おかしい。

- リゾーニング
していない
- 三角形一次
要素なので
ロッキング
している
- トレランスが
大き過ぎる



3Dねじり解析

Equivalent Plastic Strain



- 静的, 3次元
- 1 m x 2 m x 4 mの弾塑性体
(塑性係数: 0.5 GPa)
- 下面を完全拘束
- 上面を360度ねじってまた元の位置に戻す
- 45度毎にリゾーニング
- 四面体要素をFS/NS-FEMで使用

④

まとめ

まとめ／今後の予定

■まとめ

増分形釣合方程式に基づく陰解法メッシュリゾーニングを用いることにより、大変形弾性・超弾性解析と同様、大変形弾塑性解析も高精度かつ安定に解けることを示した。

■今後の予定

- 応力や歪みの勾配に基づくりメッシングの粗密制御.
- 接触機能の追加.
- 亀裂進展解析への適用.

付録

提案手法のポイントQ&A その1

Question	Answer
なぜメッシュフリーでなくFEM？	<ul style="list-style-type: none">• (僕の知る限り)メッシュフリー大変形解析手法でDivergence Free条件とPartition of Unity条件を両方を低計算コストで実現する解析手法がないため.• 加えて, 凹角部での影響半径の修正も必要となり, 実装が高コストかつ面倒極まりない.• しかし, 節点や応力点の追加/削除が手軽である点は魅力的であり, 未だ捨てがたい選択肢である.
なぜEulerメッシュでなくLagrangeメッシュ？	<ul style="list-style-type: none">• Eulerメッシュを用いると毎ステップ数値拡散が起こる. 一方, Lagrangeメッシュ+リゾーニングならばリゾーニング時のみの数値拡散で済む.
なぜ四角形/六面体メッシュでなく三角形/四面体メッシュ？	<ul style="list-style-type: none">• リゾーニングを行う以上, 四角形/六面体は諦める他無い.• 三角形要素および四面体要素による精度低下(ロッキング)はSelective ES/NS-FEMおよびSelective FS/NS-FEMを用いることで解決した.

提案手法のポイントQ&A その2

Question	Answer
なぜ陽解法でなく陰解法？	<ul style="list-style-type: none">• 陽解法は精度が悪いから。• 弾塑性ではr-min法を使わねばならず、Δtが大きく取れないから。
なぜ通常の釣合方程式でなく増分形の釣合方程式？	<ul style="list-style-type: none">• 通常の釣合方程式を用いるとリゾーニング後の状態で釣合が破綻するため、解析が不安定になる。増分形の釣合方程式を用いると破綻を避けられる。
増分形の釣合方程式を使うことによるデメリットは全く無いのか？	<ul style="list-style-type: none">• 多少ある。大きく分けて次の2点。• リゾーニング後の節点外力$\{f^{ext}\}$をマッピングにより作成する、という新たな処理が必要となり、この処理の精度が解析精度を左右する。特に除荷が入る問題でその影響は顕著となる。高精度な$\{f^{ext}\}$マッピング法の開発が必須である。• 使用出来る材料の構成方程式が増分形に限られる。超弾性体などの歪みエネルギー由来の構成方程式の場合、それを増分形に変換する作業は結構骨が折れる。でもやれば(慣れれば)出来る!!

提案手法のポイントQ&A その3

Question	Answer
どんな解析条件の問題でも安定して解が得られるのか？	<ul style="list-style-type: none">• いいえ. 静的陰解法では座屈を起こすような問題を解くことが出来ない. ($[K]$が非正則になる.)• 動的陰解法にすれば上記問題は解決される.

節点荷重ベクトルのマッピング

■ 未知数

新メッシュの変位BCを与えられた節点の荷重ベクトル

■ 最小化する目的関数

Σ ||新メッシュの表面力ベクトル

−旧メッシュの表面力ベクトル||²

■ 制約条件

● 力の釣合式 Σ (新メッシュの節点荷重ベクトル)
= Σ (旧メッシュの節点荷重ベクトル)

● モーメントの釣合式 Σ (新メッシュの節点荷重モーメント)
= Σ (旧メッシュの節点荷重モーメント)

Lagrange未定乗数法で解く

メッシュフリー法の特徴

■ 長所

- 節点の追加・削除が容易
- ロッキングしない

■ 短所

- 大歪みでも安定した形状関数の作成は相当面倒
- Divergence-free条件を満たす補正計算が相当面倒
- 異種材料, 凹境界面, 接触等の取り扱いが相当面倒
- 陰解法 + updated Lagrangianとの相性が悪い



速度形仮想仕事式

$$\int_{\Omega(t)} \dot{\mathbf{\Pi}}_t^T(t) : \delta \mathbf{F}_t(t) \, d\Omega$$

← 仕事共役

$$= \int_{\Gamma(t)} \underline{\mathbf{t}}_t(t) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega$$

- $\mathbf{\Pi}_t(t)$: 現配置を基準配置とした公称応力テンソル
 $\delta \mathbf{F}_t(t)$: 現配置を基準配置とした変形勾配テンソルの変分
 $\underline{\mathbf{t}}_t(t)$: 現配置を基準配置とした表面力ベクトル
 $\Omega(t)$: 現配置の領域, $\Gamma(t)$: 現配置の境界面
 $\delta \mathbf{u}$: 変位ベクトルの変分, $\dot{\square}$: 物質時間微分
 ρ : 密度, \mathbf{g} : 体積力加速度ベクトル

(出典: 久田・野口, 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善)

線形化と離散化

$$\int_{\Omega(t)} \dot{\Pi}_t^T(t) : \delta \mathbf{F}_t(t) \, d\Omega$$

← 仕事共役

$$= \int_{\Gamma(t)} \underline{\dot{\mathbf{t}}}_t(t) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega(t)} \rho \underline{\dot{\mathbf{g}}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega$$

時間微分
線形化

$$\dot{\Pi}_t^T(t) \simeq \Delta \Pi_t^T / \Delta t, \quad \underline{\dot{\mathbf{t}}}_t(t) \simeq \Delta \underline{\mathbf{t}}_t / \Delta t, \quad \underline{\dot{\mathbf{g}}} \simeq \Delta \underline{\mathbf{g}} / \Delta t$$

Galerkin
離散化

$$\delta \mathbf{F}_t(t) \simeq [B_N] \{ \delta \mathbf{u} \}, \quad \delta \mathbf{u} \simeq \{ N \} \{ \delta \mathbf{u} \}$$

一貫して後退差分を用いる静的陰解法

$$\sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} [B_N^+]^T \{ \Delta \Pi_t^T \} \, d\Omega$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{S}} \int_{\Gamma_s^+} [N^+]^T \{ \Delta \underline{\mathbf{t}}_t \} \, d\Gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} \rho^+ [N^+]^T \{ \Delta \underline{\mathbf{g}} \} \, d\Omega$$

□⁺: 試行変数
 E: 要素の集合
 S: 境界要素面の集合

増分形釣合方程式

$$\sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} [B_N^+]^T \{ \Delta \Pi_t^T \} d\Omega$$
$$= \sum_{s \in \mathbb{S}} \int_{\Gamma_s^+} [N^+]^T \{ \Delta \underline{t}_t \} d\Gamma + \sum_{e \in \mathbb{E}} \int_{\Omega_e^+} \rho^+ [N^+]^T \{ \Delta g \} d\Omega$$

増分形釣合方程式 (第1形式)

$$\{ \Delta f^{\text{ext}} \} - \{ \Delta f^{\text{int}} \} = \{ 0 \}$$

増分形釣合方程式 (第2形式)

$$(\{ f^{\text{ext}} \} + \{ \Delta f^{\text{ext}} \}) - (\{ f^{\text{int}} \} + \{ \Delta f^{\text{int}} \}) = \{ 0 \}$$

実際の実装ではこの第2形式を解く



左辺を $\{ \Delta f^{\text{int}} \}$, 右辺を $\{ \Delta f^{\text{ext}} \}$ とおく



残差の蓄積を回避