微圧縮大変形解析における
次世代平滑化有限要素法(EC-SSE-SRI-T4)の性能評価

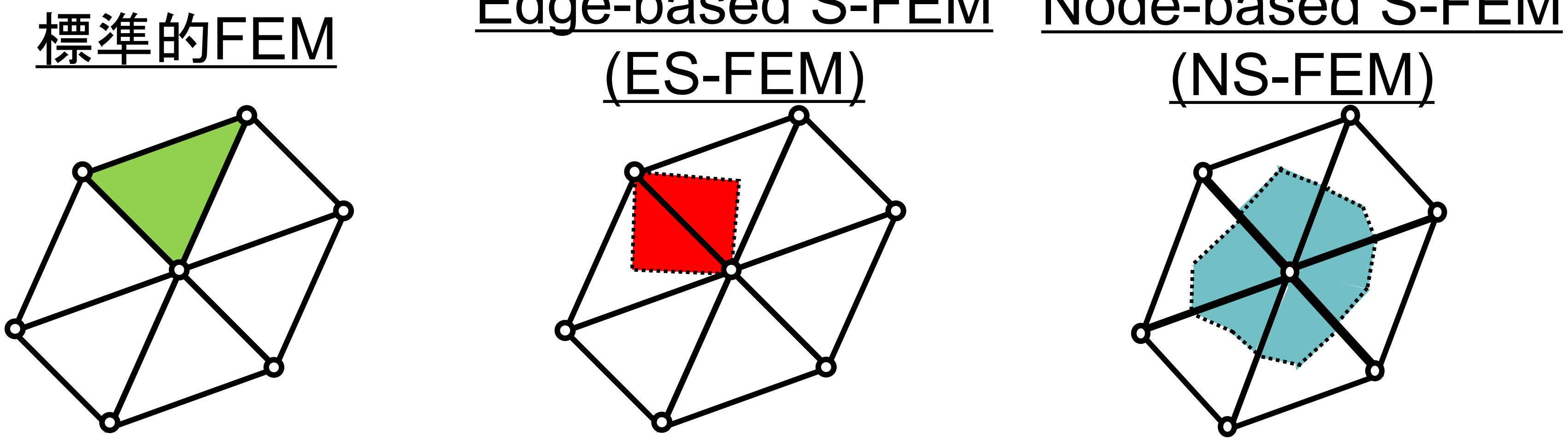
大西 有希（東京工業大学）

平滑化有限要素法(S-FEM)の簡単な紹介

平滑化有限要素法(S-FEM)とは？

- *Smoothed* Finite Element Method，略して**S-FEM**.
- 2006年に提唱された比較的新しいFEMの定式化手法.
- いわゆる「ひずみ平滑化」手法の1つ.
- ひずみの平滑化スキームに依り，多種多様な**S-FEM**がある.
- 古典的なS-FEMが数種あり，それぞれひずみ平滑化領域が異なる.

例えば，2次元3節点三角形メッシュを用いる場合：



色の付いた領域がひずみ平滑化領域を表す.

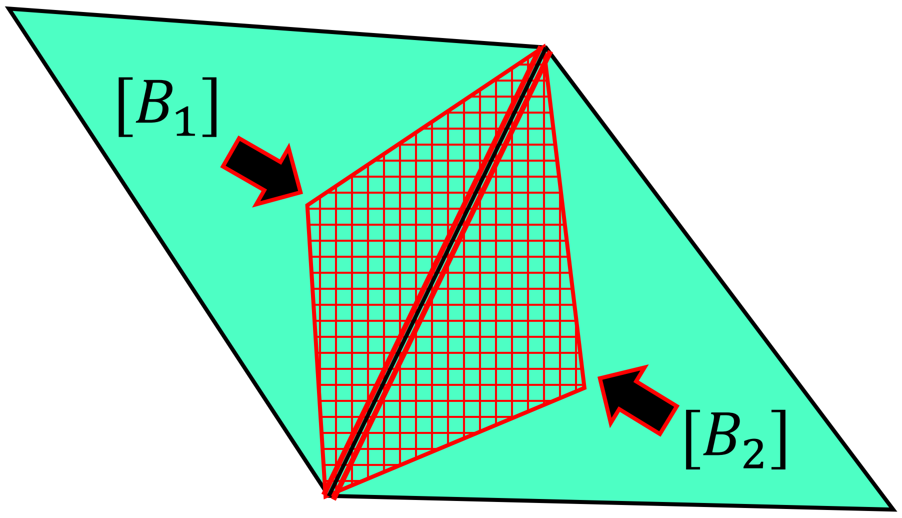
ES-FEMの定式化概要

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

簡単のため
2Dで解説します

- 各セルでひずみ−変位マトリックス$[B]$を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの$[B]$を集め，集めた各セルの体積を重みとして$[B]$を平均化し，エッジ平滑化領域の$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を用いて各エッジのひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}$・応力$\boldsymbol{\sigma}$・節点内力$\{f^{\mathrm{int}}\}$を計算する.

ガウス点が
各エッジ中心に
あるイメージ



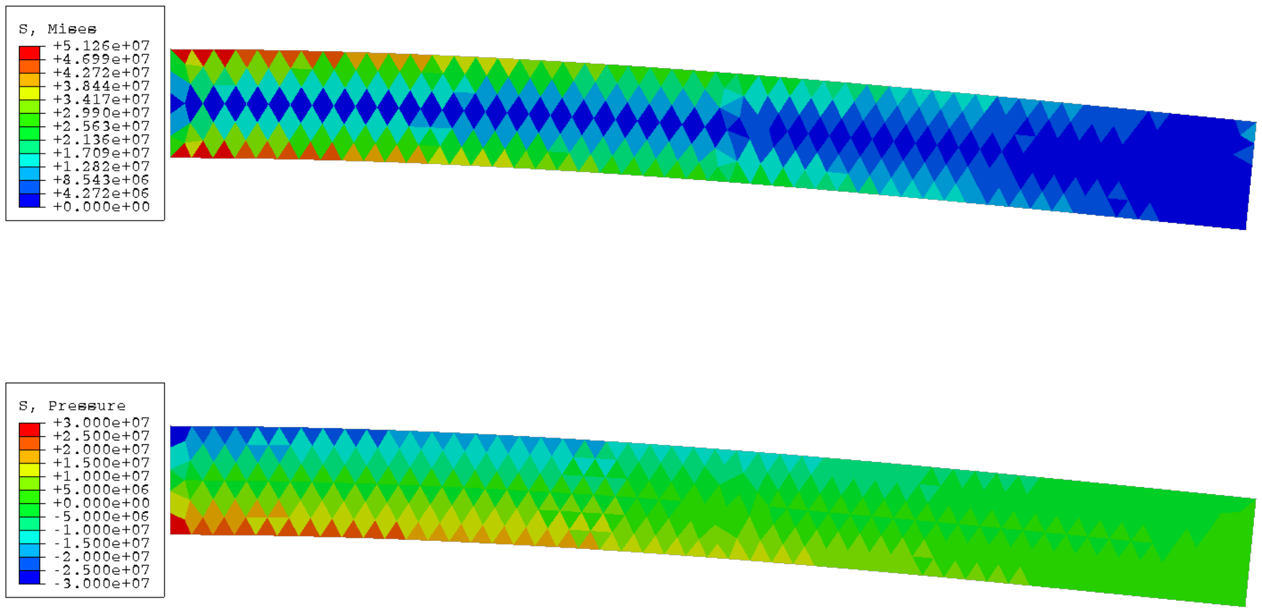
$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$

↳ ${}^{\mathrm{Edge}}\boldsymbol{\varepsilon}$, ${}^{\mathrm{Edge}}\boldsymbol{\sigma}$, $\{{}^{\mathrm{Edge}}f^{\mathrm{int}}\}$ etc.

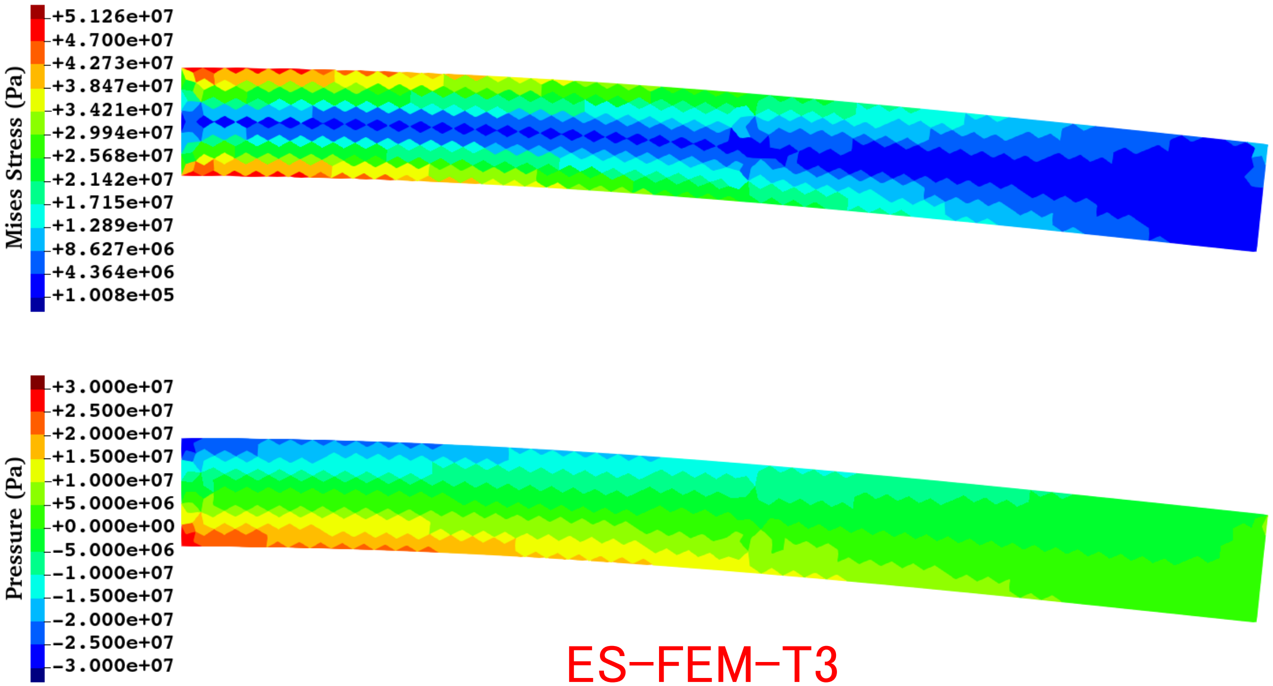
ES-FEMの解析例

片持梁の曲げ(応力)

10x1 mでポアソン比0.3の梁先端に下向き集中荷重を与える.



ABAQUS CPE3 (FEM-T3)



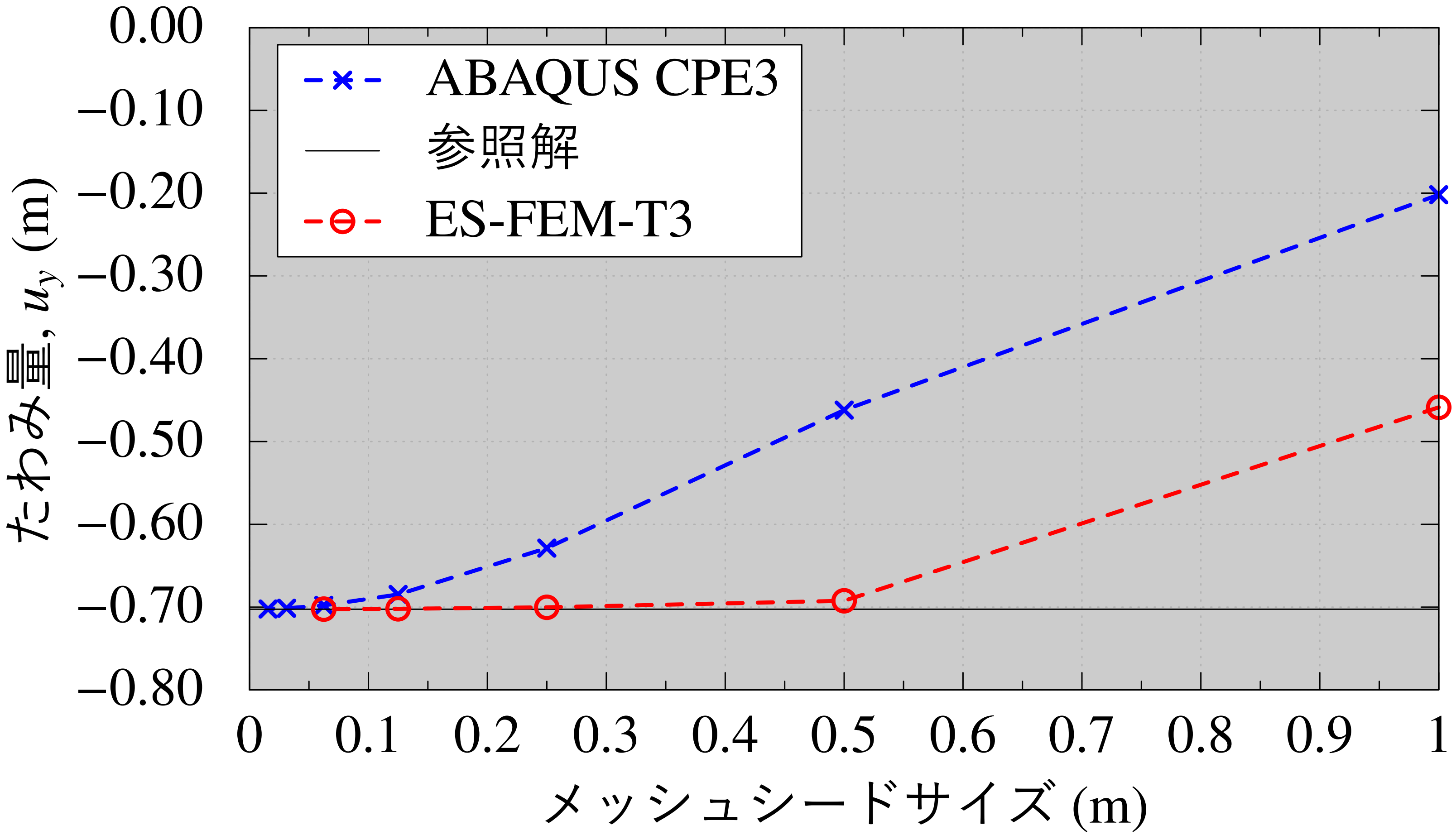
ES-FEM-T3

同じメッシュでES-FEM-T3の方が明らかに応力/ひずみの精度が高いことが分かる.

ES-FEMの解析例

片持梁の曲げ(たわみ)

10x1 mでポアソン比0.3の梁先端に下向き集中荷重を与える.



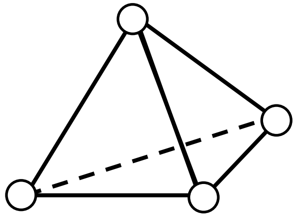
メッシュシードサイズ (m)	メッシュ数 (個)
1	22
1/2	$\boxed{84}$ 収束
1/4	342
1/8	1,442
1/16	$\boxed{5,766}$ 収束
1/32	23,034
1/64	92,146

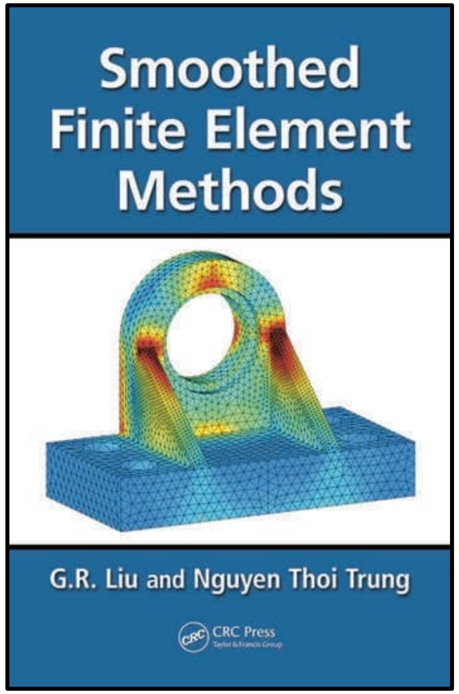
ES−FEM−T3の方が変位/荷重のメッシュ収束速度が明らかに早いことが分かる.

S-FEMの長所は？

1. T4メッシュで超1次のメッシュ収束速度
   （2次要素と同等のメッシュ収束速度をT4メッシュで実現）
2. ES-FEM-T4でせん断ロッキングフリー
   （微圧縮以外の固体解析がT4メッシュでも高精度）
3. NS-FEM-T4で体積ロッキングフリー
   （微圧縮の固体解析でカギとなる手法）
4. 低品質なメッシュでも解が高品質
   （複雑形状や厳しい大変形に強い）
5. 自由度が増えない
   （純粋な変位型の定式化である ）
6. コーディングが楽
   （難解な混合型変分原理が不要）

T4: 4節点四面体





CRC Press社ウェブサイトより引用

詳細は左図の書籍を参照

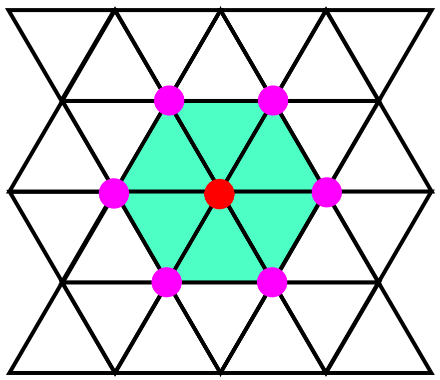
S-FEMは産業応用に適した実用的な手法である.

S-FEMの短所は？

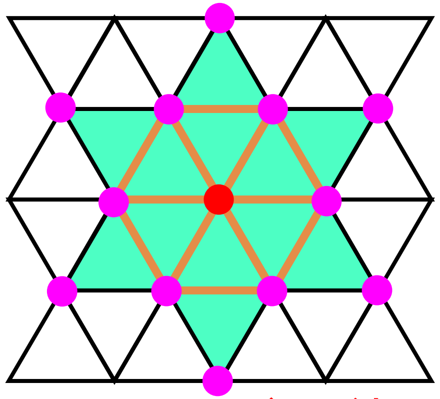
■ 剛性マトリックス$[K]$の組み立て時間が長い.
ES−FEM−T4の場合，セル数よりエッジ数の方が多いので，FEM−T4の約２倍の時間がかかる.

■ 剛性マトリックス$[K]$のバンド幅が広い.
2次元T3メッシュの場合：

ある節点は
6個のセルに参照される
⇒ 自身を含め
7個の節点と手を繋ぐ



FEM-T3 (バンド幅: 7)



ES-FEM-T3 (バンド幅: 13)

ある節点は
12本のエッジに参照され，
それらは12個のセルに参照される
⇒ 自身を含め
13個の節点と手を繋ぐ

3次元でも同様で，ES−FEM−T4のバンド幅はFEM−T4の約3倍広い.
→同じメッシュなら，ES−FEM−T4の方が約３倍遅い.

ただし，同じ解析精度なら
ES−FEMの方が数倍速い.

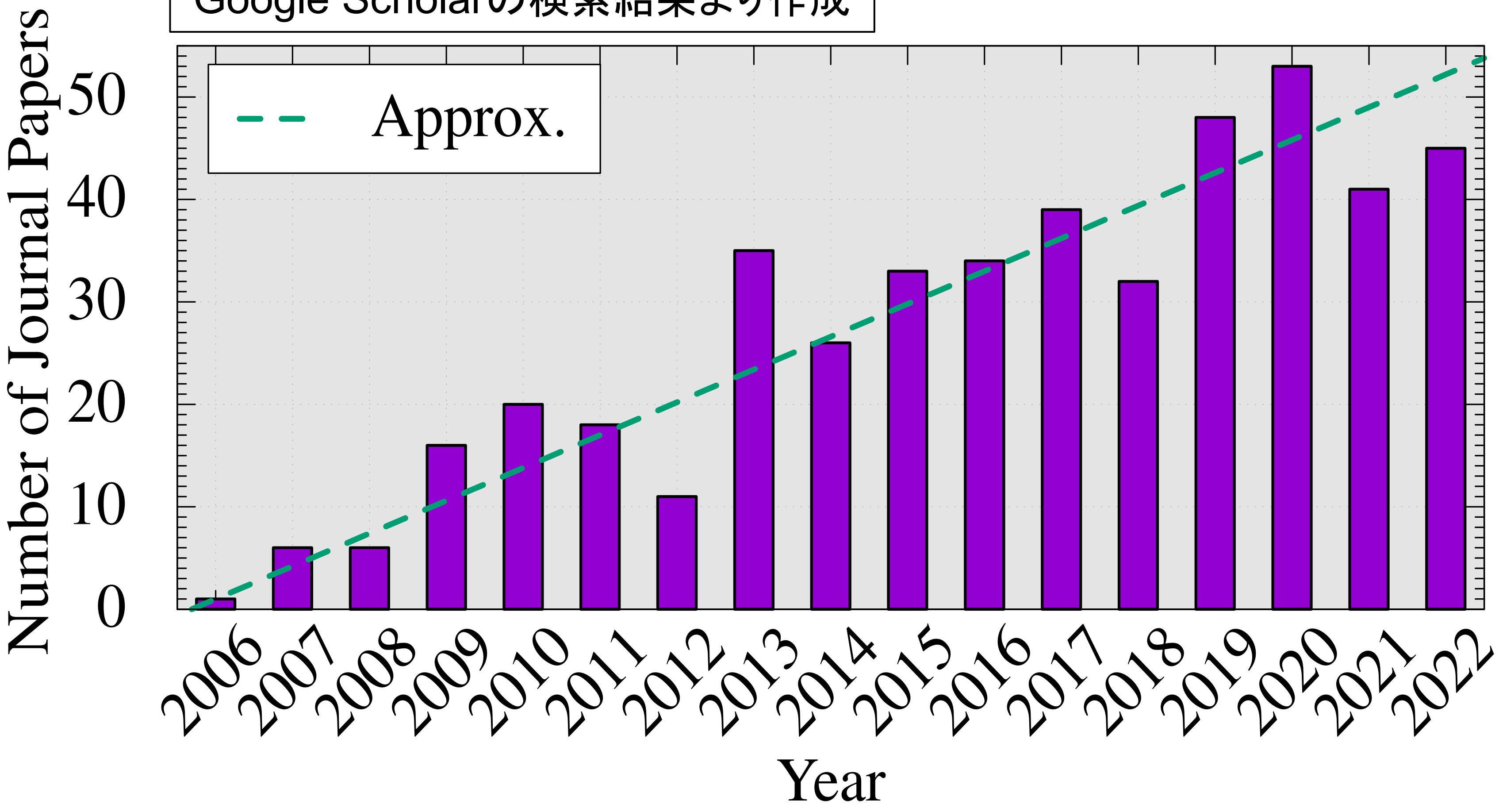
■ 標準的なFEMコードに実装できない.
∵セルをまたぐひずみ平滑化を行うので，独立した「要素」ではなくなる.

■ 微圧縮で満足できる
定式化がまだ無い.

S-FEMの人気は？

タイトルに「smoothed finite element」が含まれる論文の数

Google Scholarの検索結果より作成



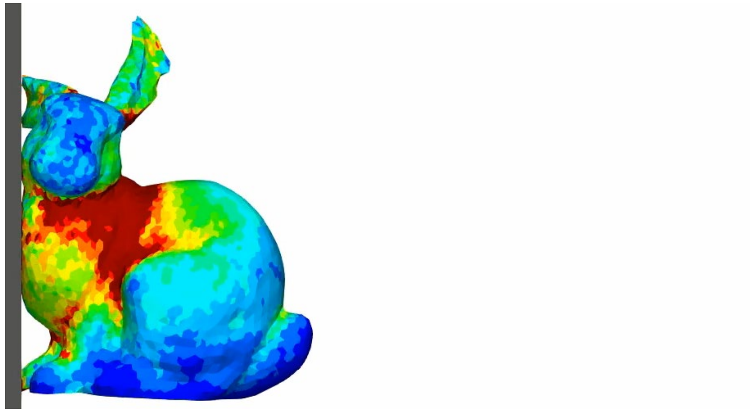
- S-FEM発案者のG. R. Liu先生とその門下生を中心に，米・中・シンガポールの論文数が特に多い．
- 近年は欧州・インド・韓国の研究も目立ってきている．
- 日本での研究は僕と藤川先生（琉球大）の2グループだけ．．．

S-FEMの人気は今なお高まりを続けている

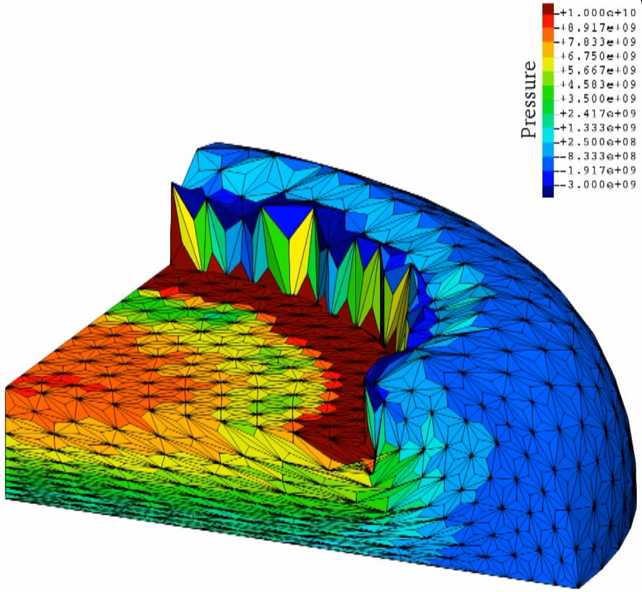
我々のグループのS-FEM-T4適用事例

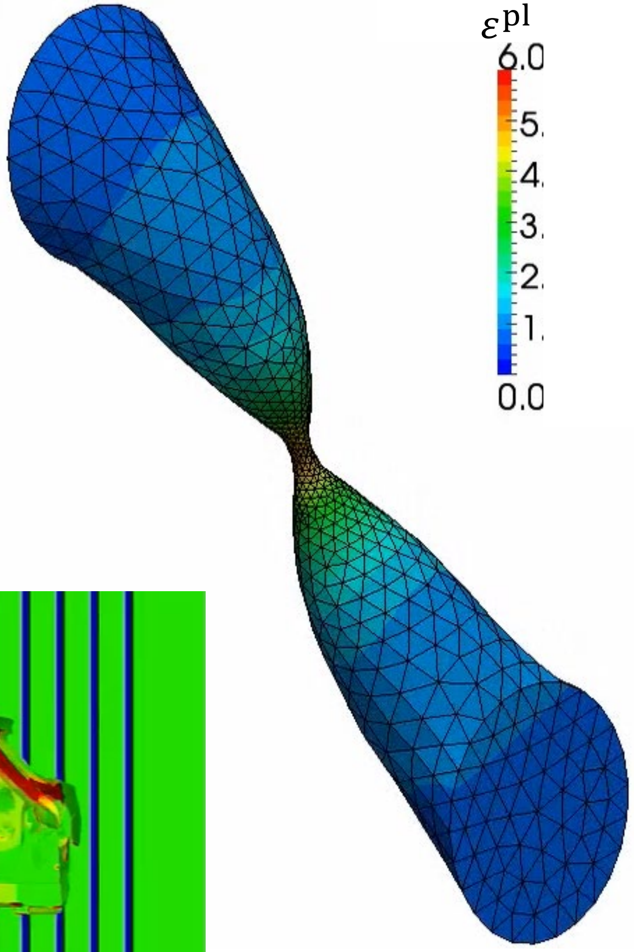
■ 大変形固体解析（実用化はまだ）

動的陽解法

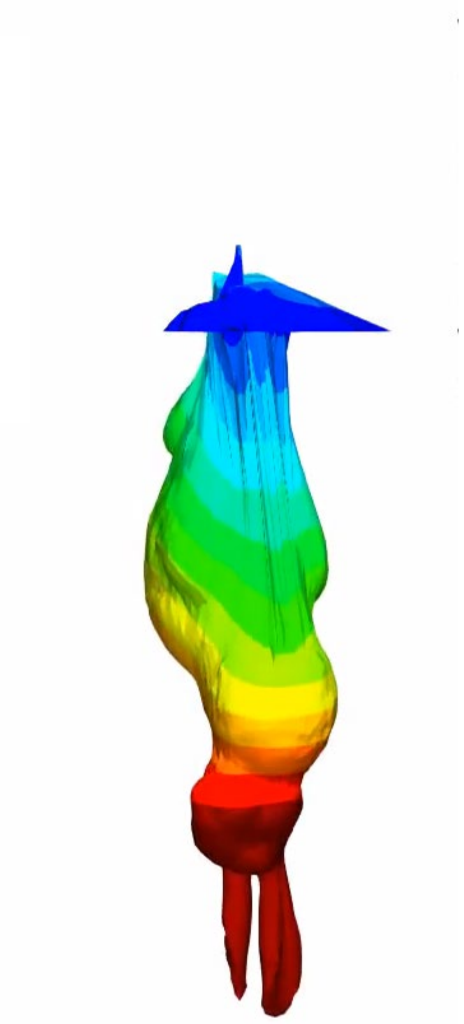


静的陰解法



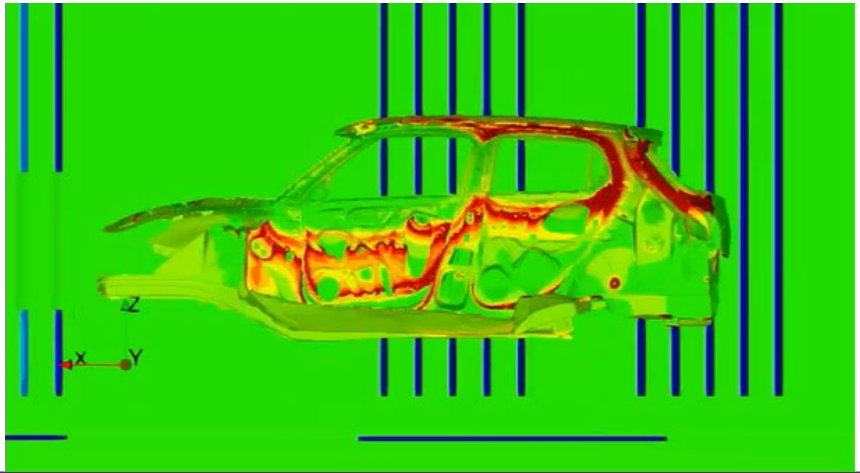


準静的陰解法



■ 静電場解析（実用化済）

自動車製造
実ラインの
電着塗装



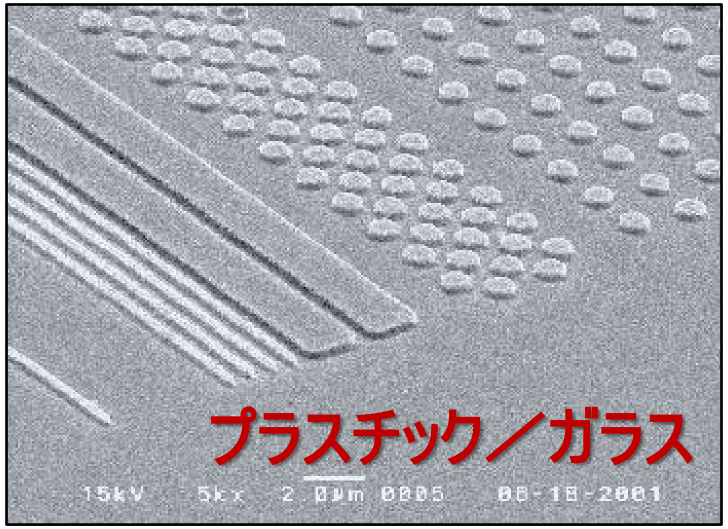
本日の講演は，
S-FEM-T4を用いた
静的陰解法の最新手法
を紹介します．

本題

研究背景

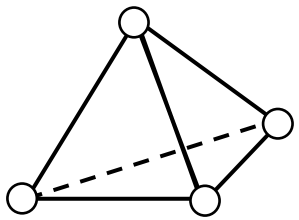
実現したい内容

■「超」大変形問題を
高精度かつロバストに解きたい.
■ 複雑形状を**四面体**で解きたい.
■ **微圧縮性が現れる材料**も解きたい.
■ 自動リメッシングも実現したい.
■ 接触も扱いたい.

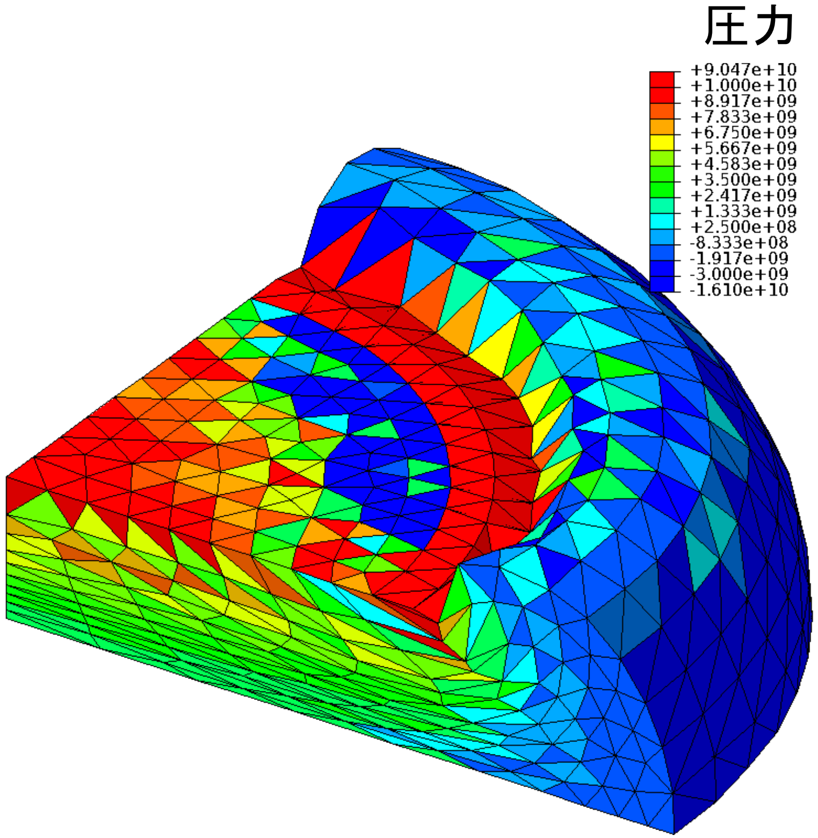


既存手法の問題点（ABAQUSの要素）

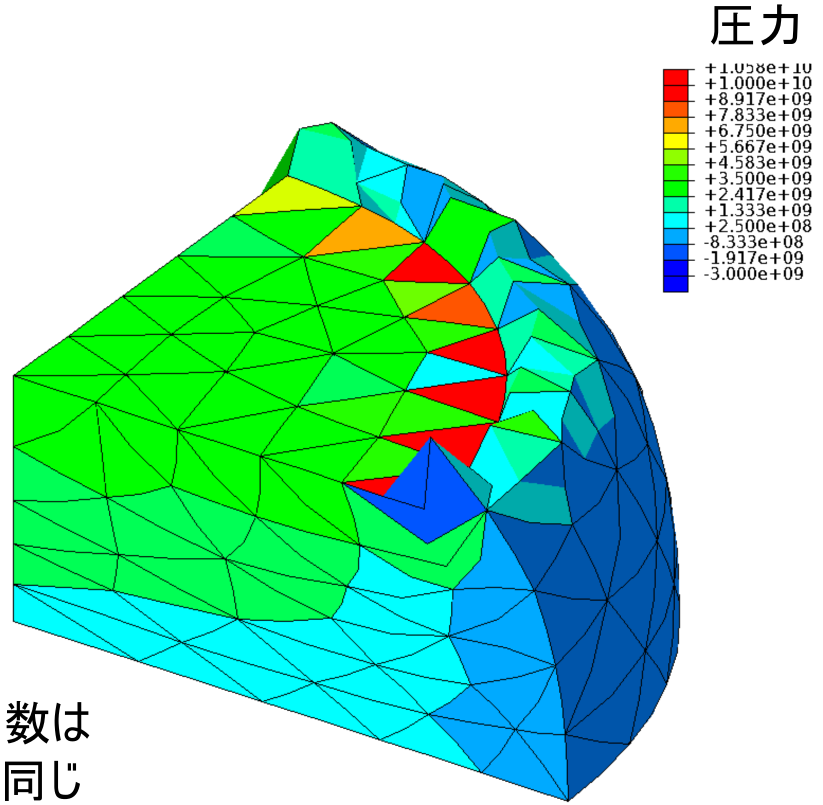
四面体解析例 材料: neo-Hookean超弾性体, $\nu_{\mathrm{ini}} = 0.49$

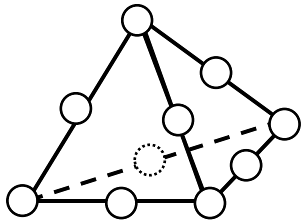


T4



節点数は
ほぼ同じ





T10

四面体1次ハイブリッド要素(C3D4H)

- ✓ 体積ロッキングなし.
- ✗ **圧力振動（チェッカーボード）あり.**
- ✗ せん断／コーナーロッキングあり.

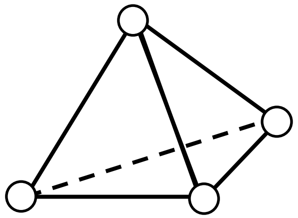
四面体2次修正ハイブリッド要素(C3D10MH)

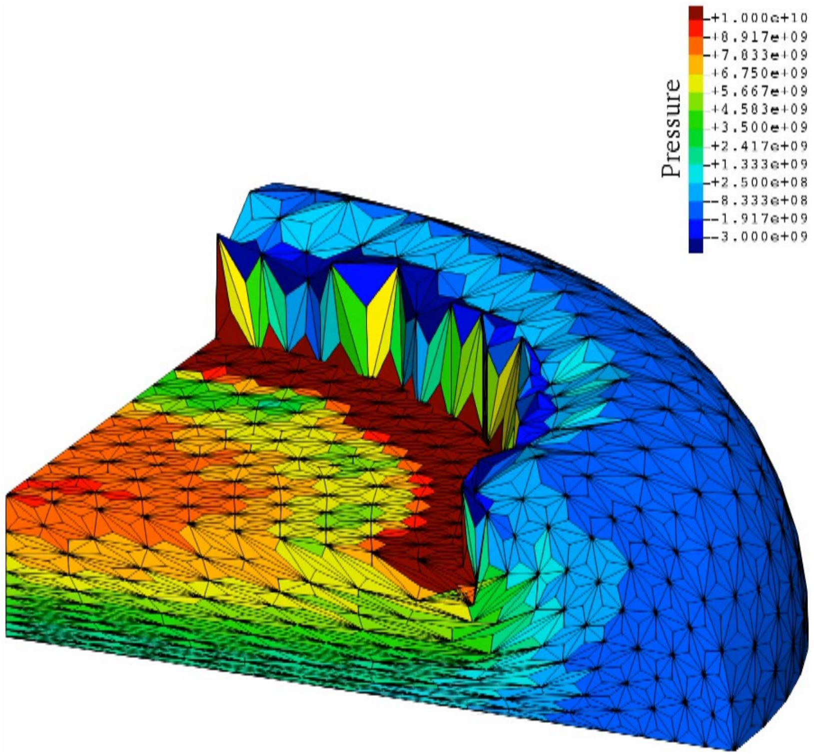
- ✓ せん断／体積ロッキングなし.
- ✗ 内挿の精度低下あり.
- ✗ **大変形で早期の収束困難あり.**

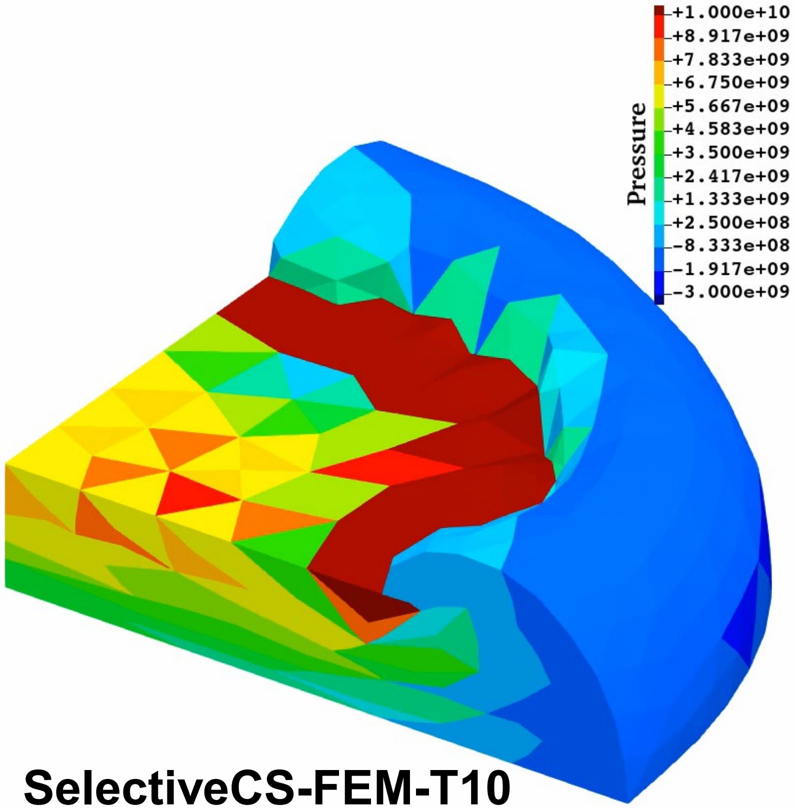
我々の従来手法（平滑化有限要素法：S-FEM）

四面体解析例 材料: neo−Hookean超弾性体, $\nu_{\mathrm{ini}} = 0.49$

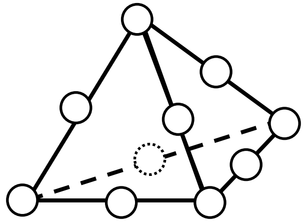
メッシュは先程の
C3D4Hと同じ.


T4





メッシュは先程の
C3D10MHと同じ.


T10

F-barES-FEM-T4

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ コーナーロッキングも充分小さい.
- ✓ 圧力振動は充分小さい.
- ✓ 偏差応力の精度も良好.
- ✗ 計算時間が長い. FEMと親和性なし.

SelectiveCS-FEM-T10

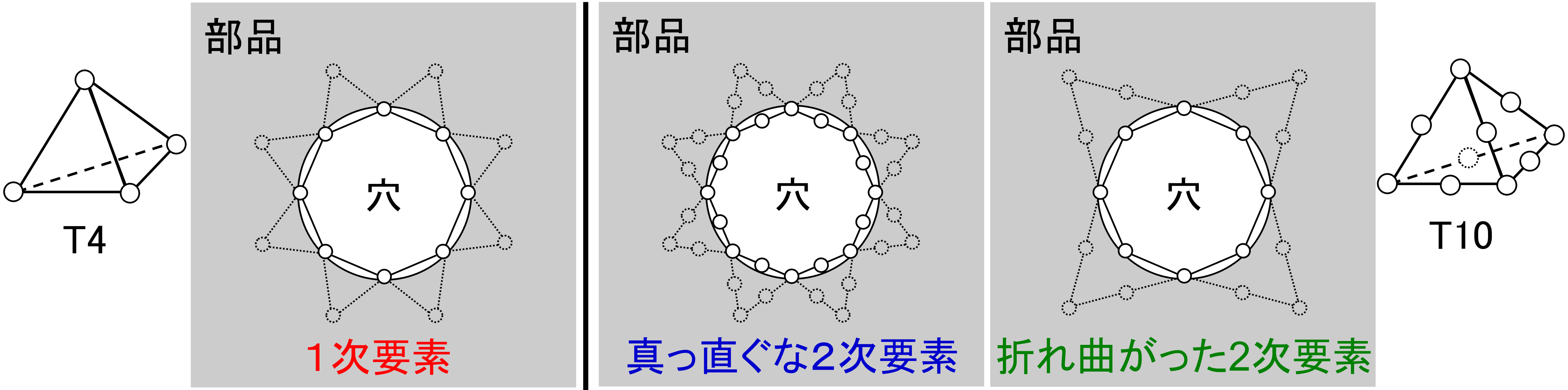
- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ 圧力振動はある程度小さい.
- ✓ コーナーロッキングもある程度小さい.
- ✗ 偏差応力に振動が現れる.
- ✓ 計算時間が短い. FEMと親和性あり.

FEM−T4の10倍超の計算時間が掛かるが, 高速化のアイデアが無かった.

FEMとの親和性を保ったまま今以上の改良のアイデアが無い.

T4とT10のどちらが良いか？

メッシュ生成の観点のみで考えると，T10はT4より複雑形状の表現に明らかな難がある.
例えば，小さい穴が空いた部品を考えると，穴周辺の表面メッシュは下図の様になる.



✓ 何の問題もない.

✗ 節点数が猛烈に増える.

✗ 内挿精度が犠牲になる.

複雑形状を持つ実問題を扱うなら，やはりT4の方が便利.

エッジ中心ひずみ平滑要素（EC-SSE）の登場

片持ち梁の曲げのMises応力分布比較（3節点三角形メッシュ）

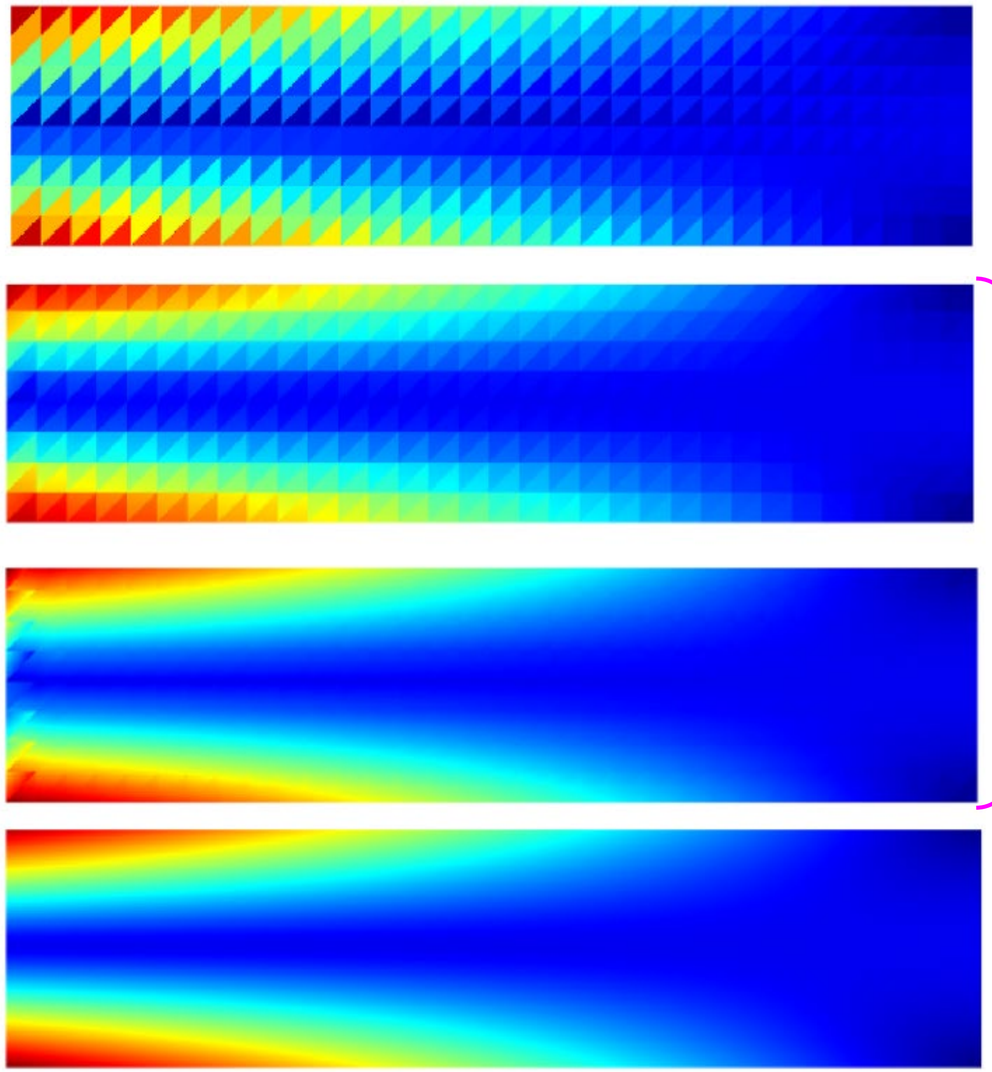
T. Jinsong *et al*., Euro. J. Mech. /A, v95, 2022.

FEM-T3

SSE
Strain
Smoothing
Element

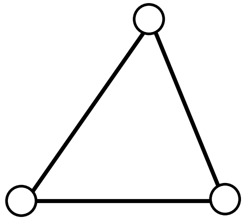
EC-SSE
Edge
Centered
SSE

Analytic



詳細は後述

応力分布が階段状で低精度.
実は，せん断ロッキングも
起こしている.



T3
ポアソン比は0.3

- ひずみ/応力が要素内で線形分布なので高精度.
- 更にEC-SSEではひずみ/応力の連続性もある.
- せん断ロッキングなし.

ただし,

- FEMとの親和性なし.
- 体積ロッキングあり.

次世代のS-FEM
「S-FEM 2.0」
と呼ぶにふさわしい
飛躍的進歩

ポアソン比**0.49**までの
ゴム大変形に拡張する
手法を開発しよう！

研究目的

次世代平滑化有限要素法(EC-SSE-T4)を微圧縮用に改良した新たなS-FEM定式化(EC-SSE-SRI-T4)を提案し，ゴム大変形での性能（精度と大変形ロバスト性）を評価する．

<u>発表目次</u>:
- 手法：提案手法の定式化概要の紹介
- 結果と考察：解析例の紹介 と 計算コストの考察
- まとめ

手法

提案手法の定式化概要の紹介

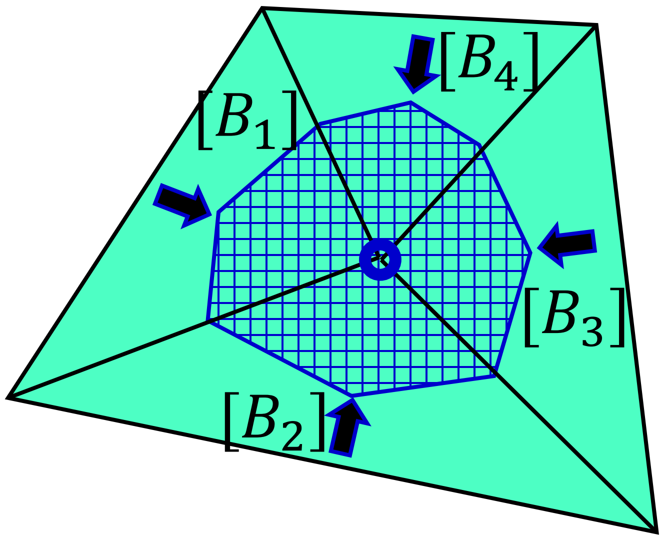
NS-FEMの定式化概要

- 各セルの$[B]$を通常のFEMと同様に作る.
- 各ノードにて周辺セルの$[B]$を集め，集めた各セルの体積を重みとして$[B]$を平均化し，ノード平滑化領域の$[{}^{\mathrm{Node}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Node}}B]$を用いて各ノードのひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}$・応力$\boldsymbol{\sigma}$・節点内力$\{f^{\mathrm{int}}\}$を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ガウス点が
各ノードに
あるイメージ

ひずみ分布は
各平滑化領域内で
一定



$[{}^{\mathrm{Node}}B]$

$\hookrightarrow$ ${}^{\mathrm{Node}}\boldsymbol{\varepsilon}$, ${}^{\mathrm{Node}}\boldsymbol{\sigma}$, $\{{}^{\mathrm{Node}}f^{\mathrm{int}}\}$ etc.

三角形/四面体メッシュで
せん断・体積ロッキングを
回避できるが，

疑似低エネルギーモード
（アワーグラスモードの類）
が現れてしまう.

ES-FEMの定式化概要

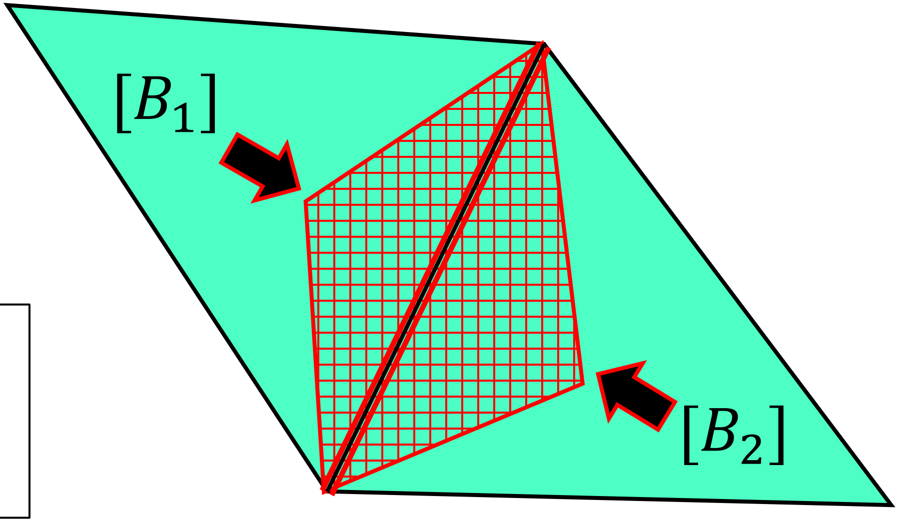
簡単のため
2Dで解説します

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルでひずみ−変位マトリックス$[B]$を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの$[B]$を集め，集めた各セルの体積を重みとして$[B]$を平均化し，エッジ平滑化領域の$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を用いて各エッジのひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}$・応力$\boldsymbol{\sigma}$・節点内力$\{f^{\mathrm{int}}\}$を計算する.

ガウス点が
各エッジ中心に
あるイメージ

ひずみ分布は
各平滑化領域内で
一定



$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$

↳ ${}^{\mathrm{Edge}}\boldsymbol{\varepsilon}$, ${}^{\mathrm{Edge}}\boldsymbol{\sigma}$, $\{{}^{\mathrm{Edge}}f^{\mathrm{int}}\}$ etc.

三角形/四面体メッシュで
せん断ロッキングを
回避できるが,

体積ロッキングは
回避できない.

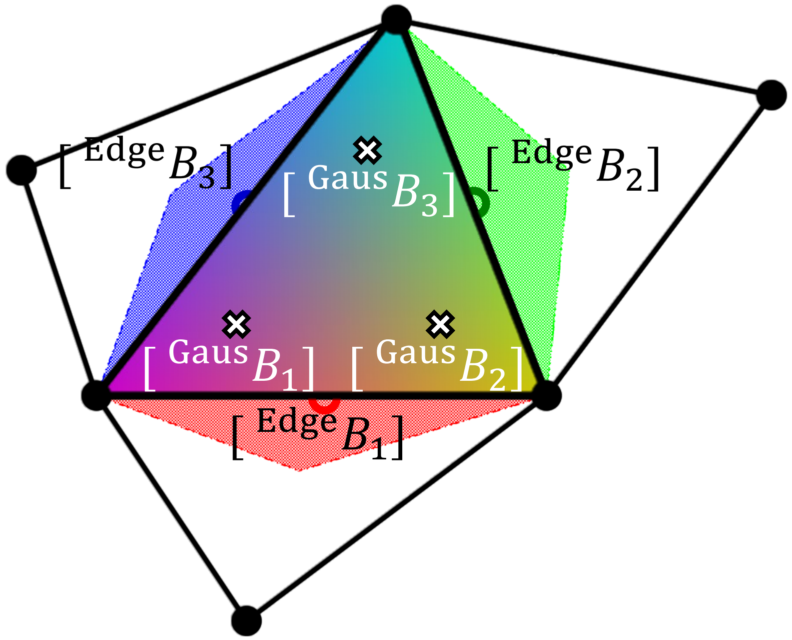
EC-SSEの定式化概要

- ES-FEMと同じ手順で各エッジの$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$は各エッジ中心の物で，<u>**各セル内で線形分布**</u>だと考える.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$をセル内の<u>**3ガウス点へと外挿**</u>して$[{}^{\mathrm{Gaus}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Gaus}}B]$を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し，三角形2次要素と同様にガウスの3点積分で節点内力を計算する.

簡単のため
２次元の
３節点三角形
メッシュで
説明します.

ひずみ平滑化を
２回行って
ガウス点で
ひずみ/応力を
評価・積分する

ひずみ分布は
各セル内で線形
かつ
<u>**エッジ中心で連続**</u>



三角形/四面体メッシュで
せん断ロッキングを
回避できる上に，
ひずみ/応力の
メッシュ収束が極めて速い

体積ロッキングは
回避できない.

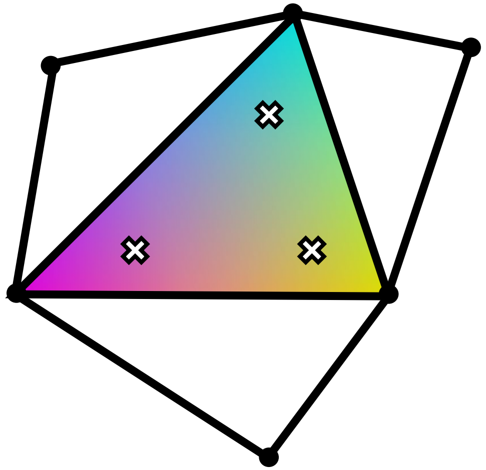
EC-SSE-SRI（提案手法）の定式化概要

微圧縮材料に対応するため，EC−SSEに選択的低減積分(SRI)を適用．

簡単のため
２次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します．

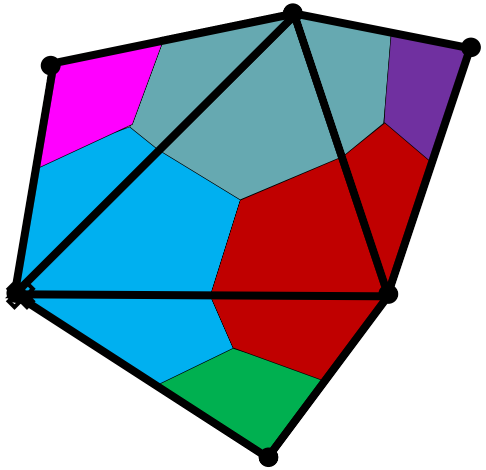
(1) EC-SSEによる
各ガウス点での偏差ひずみの計算

偏差
成分



(2) 各ガウス点での偏差応力と
その節点内力寄与$\{f_{\mathrm{dev}}^{\mathrm{int}}\}$の計算

(3) NS-FEMによる
各節点での体積ひずみの計算



体積
成分

(4) 各節点での静水圧応力と
その節点内力寄与$\{f_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{int}}\}$の計算

選択的低減積分
(SRI)

(5) 節点内力$\{f^{\mathrm{int}}\}$の組み立て

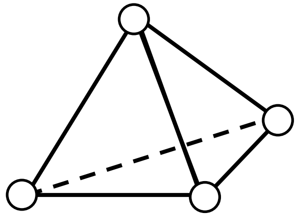
せん断/体積ロッキングを回避し
圧力チェッカーボーディングを低減

３次元の場合（EC-SSE-SRI-T4）の定式化概要

図示が難しいので，文章のみで説明します．

[偏差成分]

- 各エッジの $\left[{}^{\mathrm{Edge}}B\right]$ をES−FEMと同様に作る.
- **各フェイスにて周辺3エッジの $\left[{}^{\mathrm{Edge}}B\right]$ を集め，平均化して $\left[{}^{\mathrm{Face}}B\right]$ を作る.**
- $\left[{}^{\mathrm{Face}}B\right]$は各フェイス中心の物で，**各セル内で線形分布**だと考える.
- $\left[{}^{\mathrm{Face}}B\right]$をセル内の**4ガウス点へと外挿**して$\left[{}^{\mathrm{Gaus}}B\right]$を作る.
- $\left[{}^{\mathrm{Gaus}}B\right]$を用いて各ガウス点の偏差ひずみ・偏差応力を計算し，四面体２次要素と同様にガウスの４点積分で節点内力$\{f_{\mathrm{dev}}^{\mathrm{int}}\}$を計算する.



T4

[体積成分]

- 各ノードの $\left[{}^{\mathrm{Node}}B\right]$ をNS−FEMと同様に作る.
- $\left[{}^{\mathrm{Node}}B\right]$を用いて各ノードの体積ひずみ・静水圧応力・節点内力 $\{f_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{int}}\}$ を計算する.

[SRI]

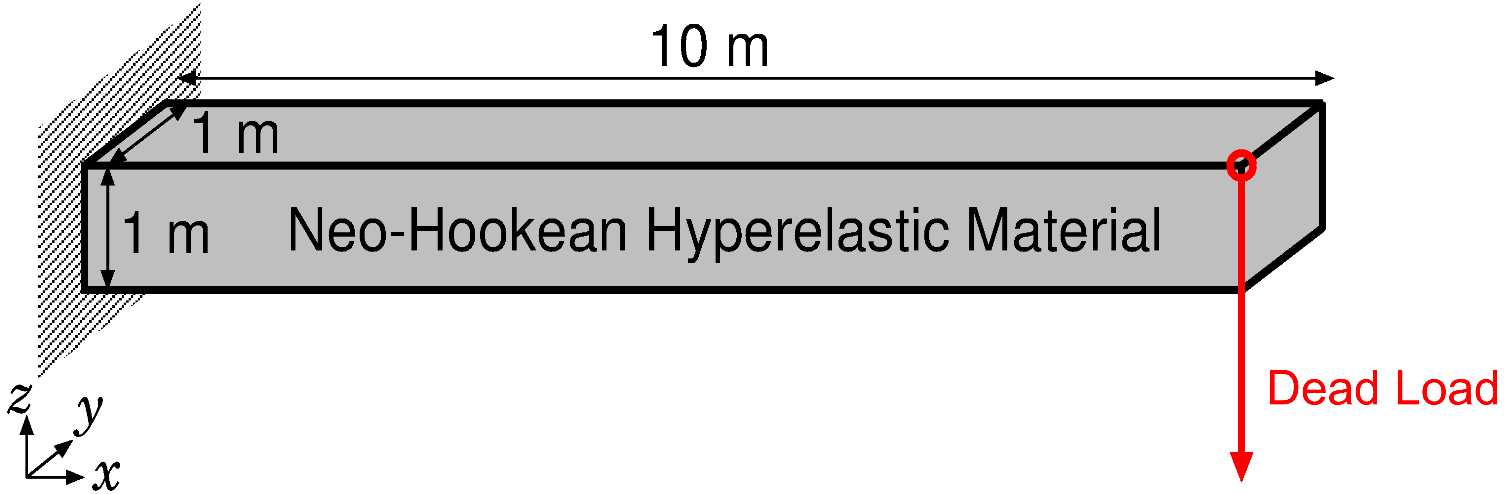
- 偏差成分と体積成分を合わせた節点内力 $\{f^{\mathrm{int}}\} = \{f_{\mathrm{dev}}^{\mathrm{int}}\} + \{f_{\mathrm{vol}}^{\mathrm{int}}\}$ を計算する.

結果と考察

解析例の紹介 と 計算コストの考察

片持ち梁の曲げ解析

概要

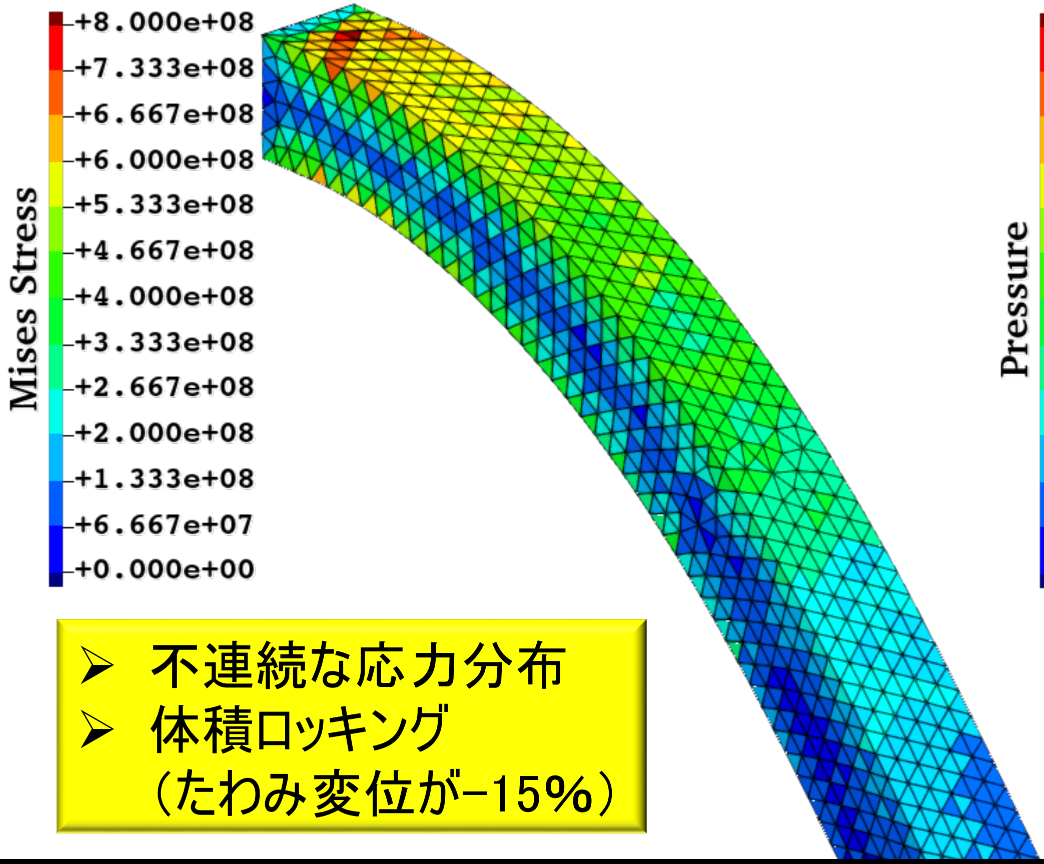


- 10 m x 1 m x 1 m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hook超弾性体（$E_{\mathrm{ini}} = 6\ \mathrm{GPa}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{ini}} = \mathbf{0.48}$, $\mathbf{0.49}$および$\mathbf{0.499}$）
- 先端の最終たわみが約6.5 mの大たわみ問題.

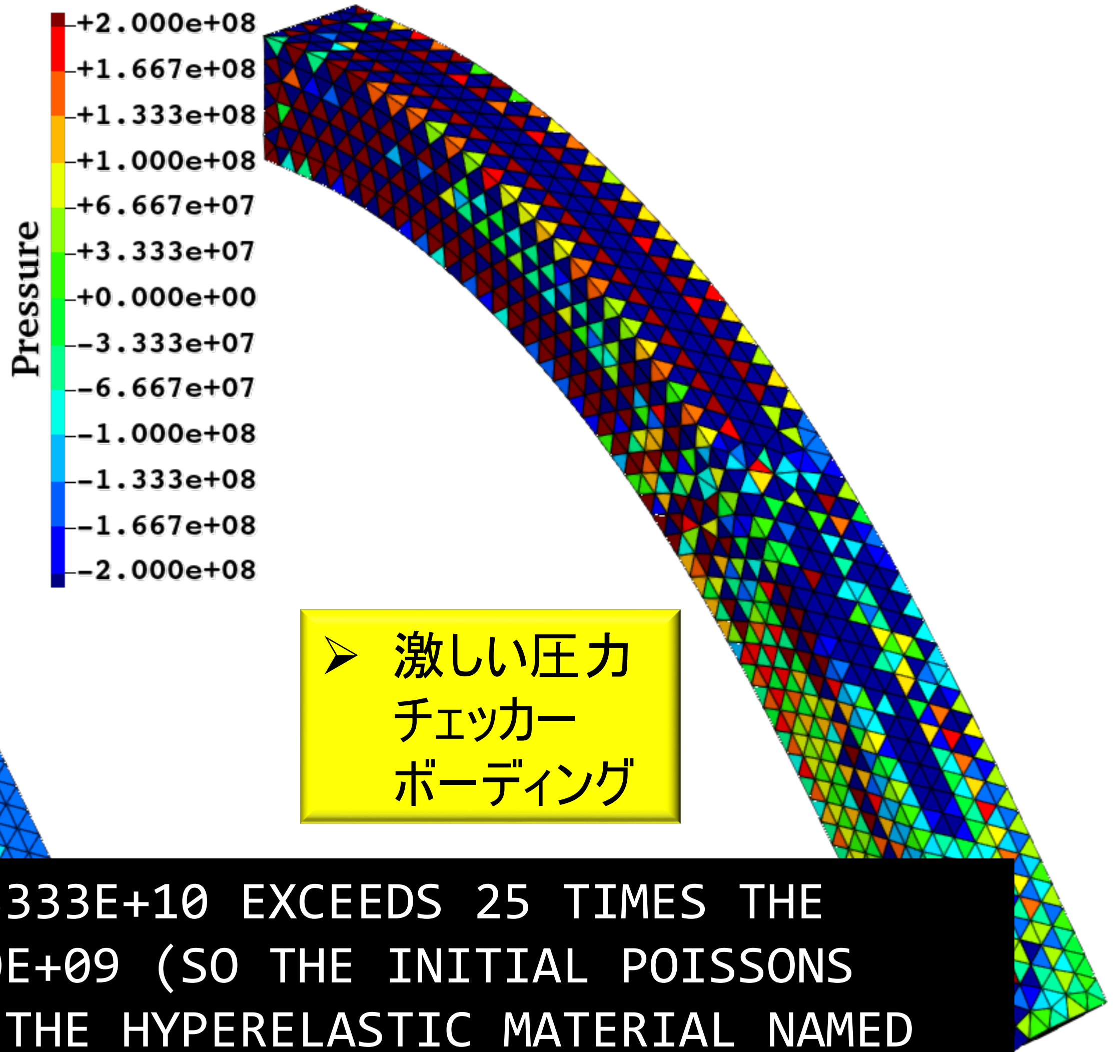
片持ち梁の曲げ解析

ABAQUS
C3D4
の解析結果
(最終状態)

初期ポアソン比
0.49



- 不連続な応力分布
- 体積ロッキング
  (たわみ変位が−15%)



- 激しい圧力
  チェッカー
  ボーディング

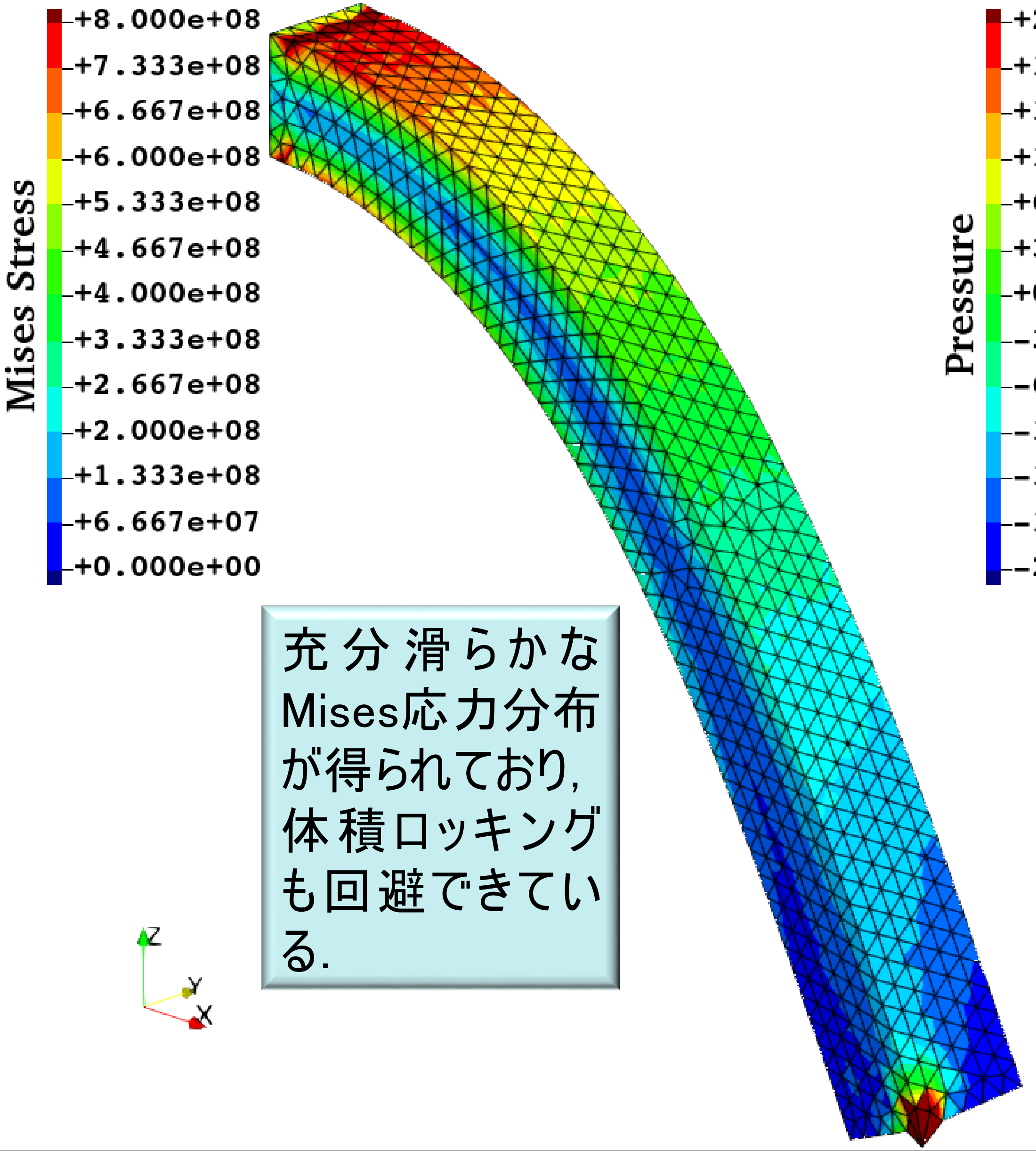
ABAQUS dat file:

```
***WARNING: THE INITIAL BULK MODULUS OF 9.93333E+10 EXCEEDS 25 TIMES THE
            INITIAL SHEAR MODULUS OF 2.00000E+09 (SO THE INITIAL POISSONS
            RATIO 0.49000 EXCEEDS 0.48) FOR THE HYPERELASTIC MATERIAL NAMED
            MATERIAL-1. HOWEVER, A HYBRID TYPE ELEMENT IS NOT USED. THIS MAY
            CAUSE CONVERGENCE PROBLEMS.
```

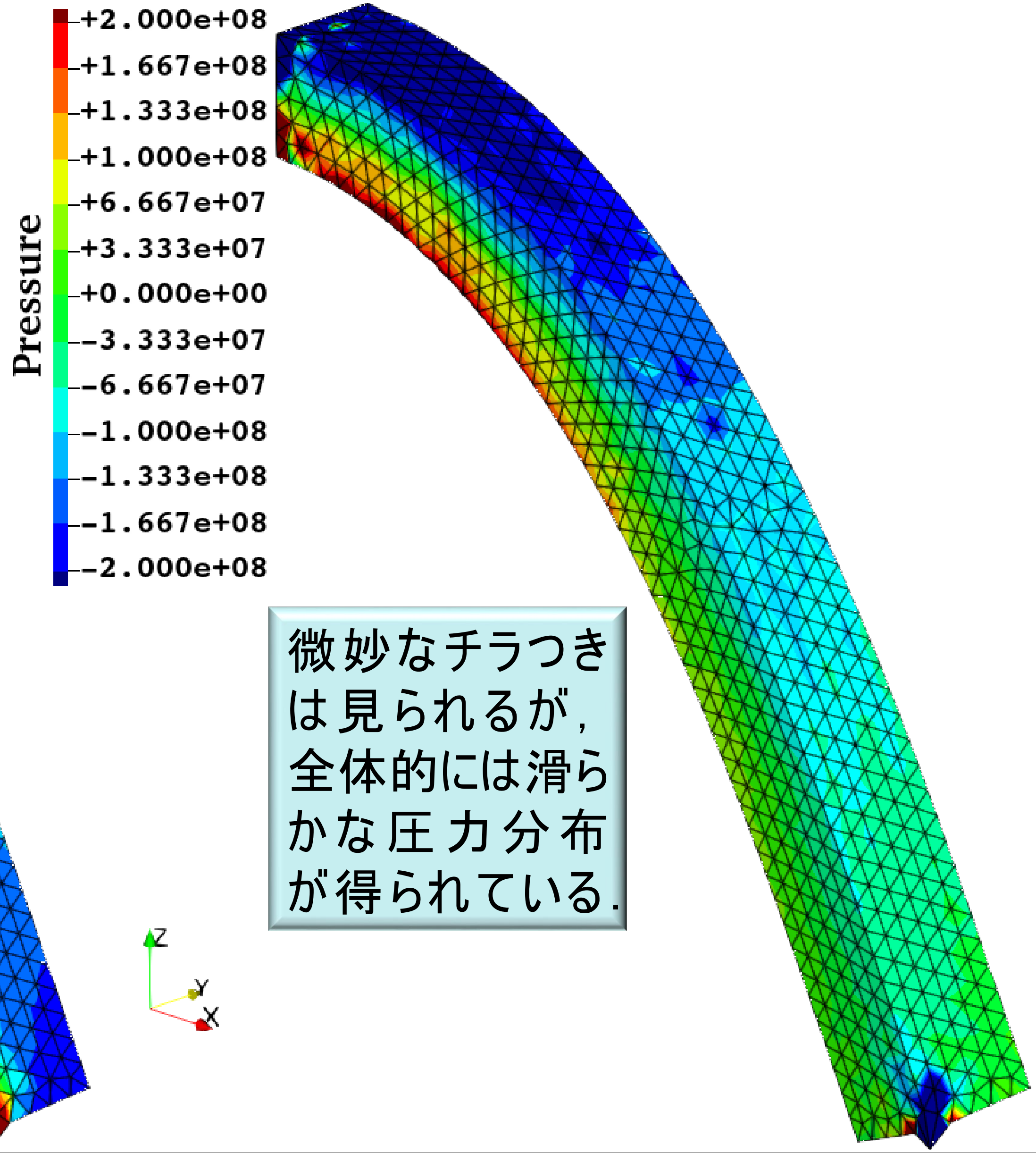
片持ち梁の曲げ解析

EC-SSE -SRI-T4 の解析結果（最終状態）

初期ポアソン比
0.49



充分滑らかなMises応力分布が得られており，体積ロッキングも回避できている．

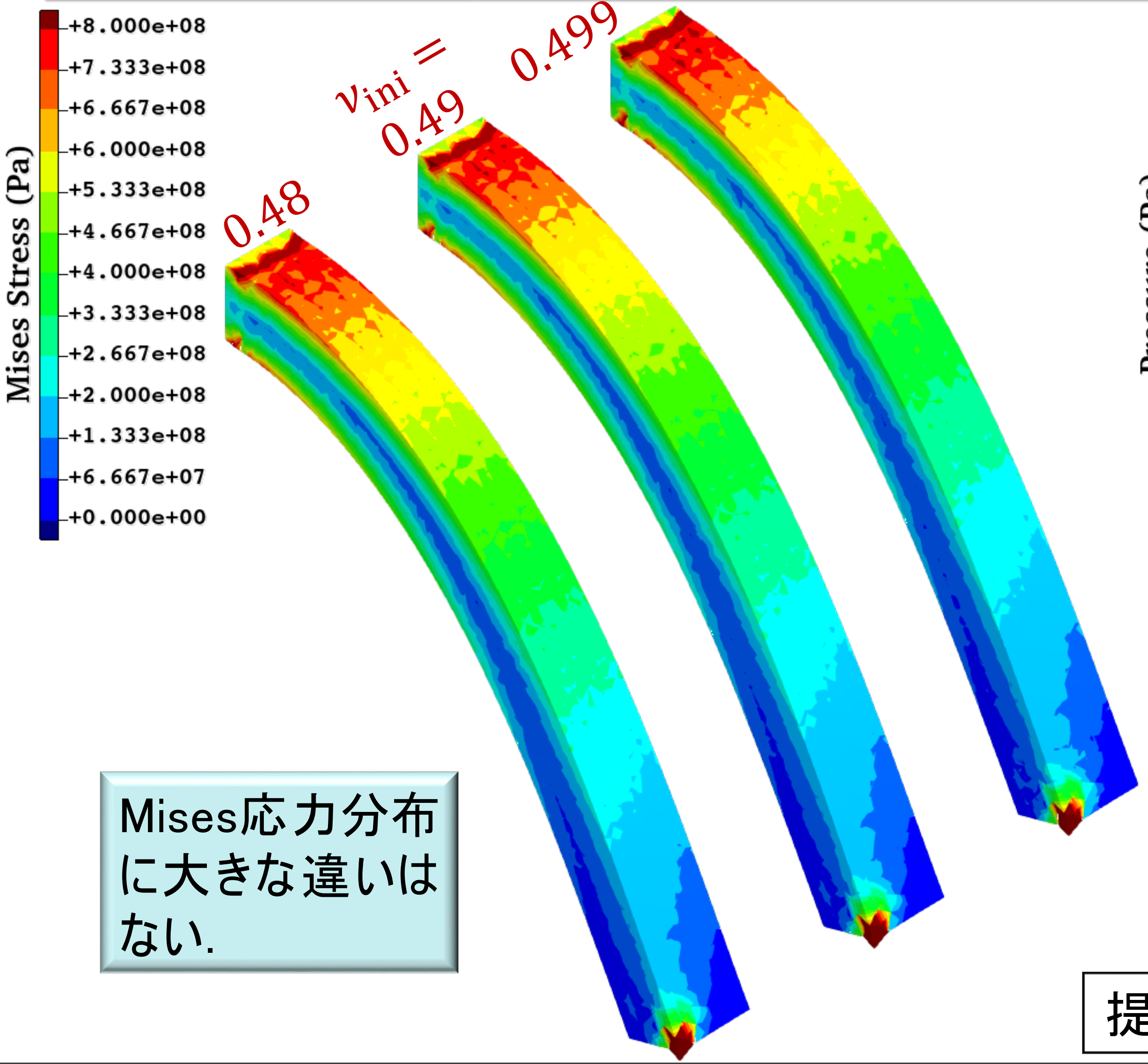


微妙なチラつきは見られるが，全体的には滑らかな圧力分布が得られている．

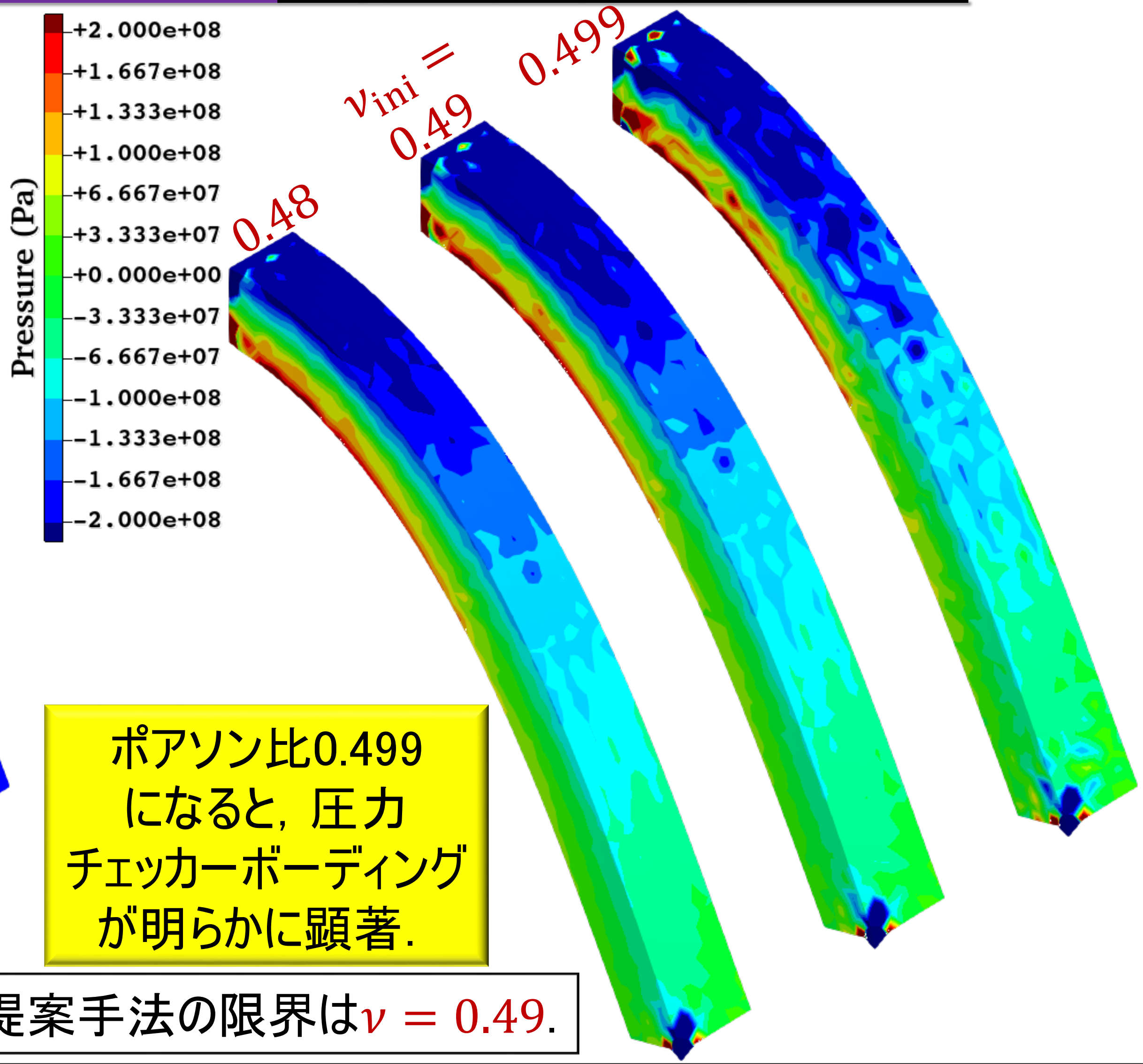
節点変位・反力にも問題なし（詳細略）

片持ち梁の曲げ解析

初期ポアソン比を変えた場合のEC-SSE-SRI-T4の解析結果（最終状態）



Mises応力分布に大きな違いはない.

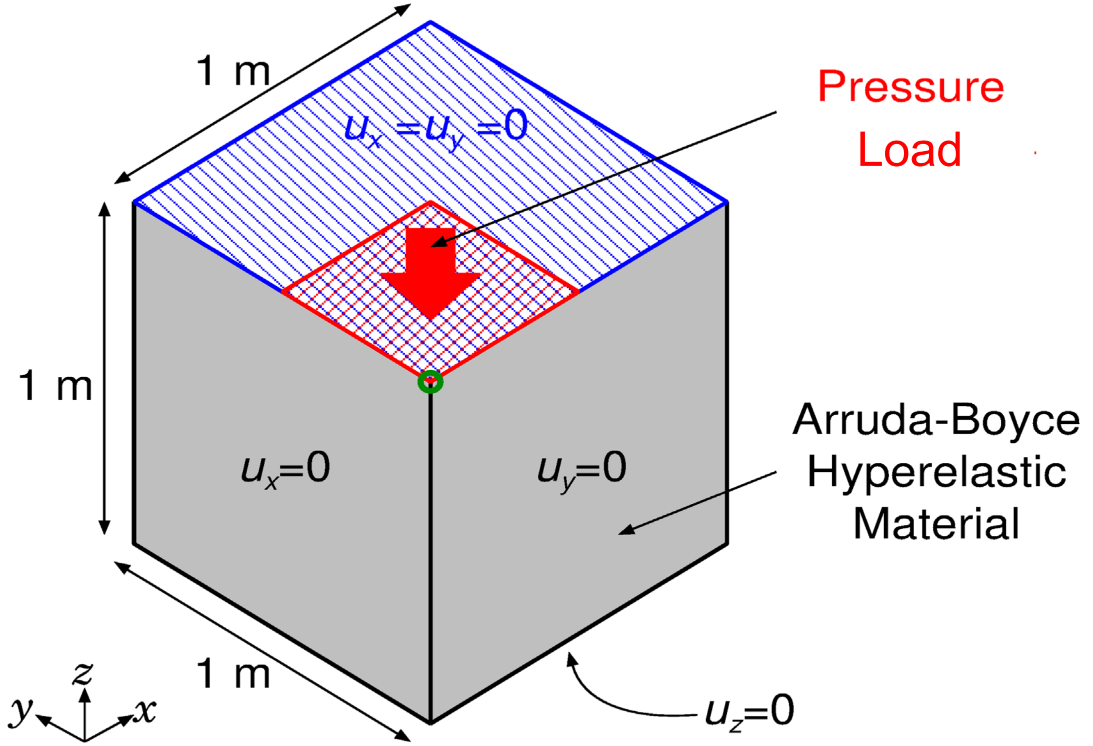


ポアソン比0.499になると，圧力チェッカーボーディングが明らかに顕著.

提案手法の限界は$\nu = 0.49$.

ブロックの圧力押込解析

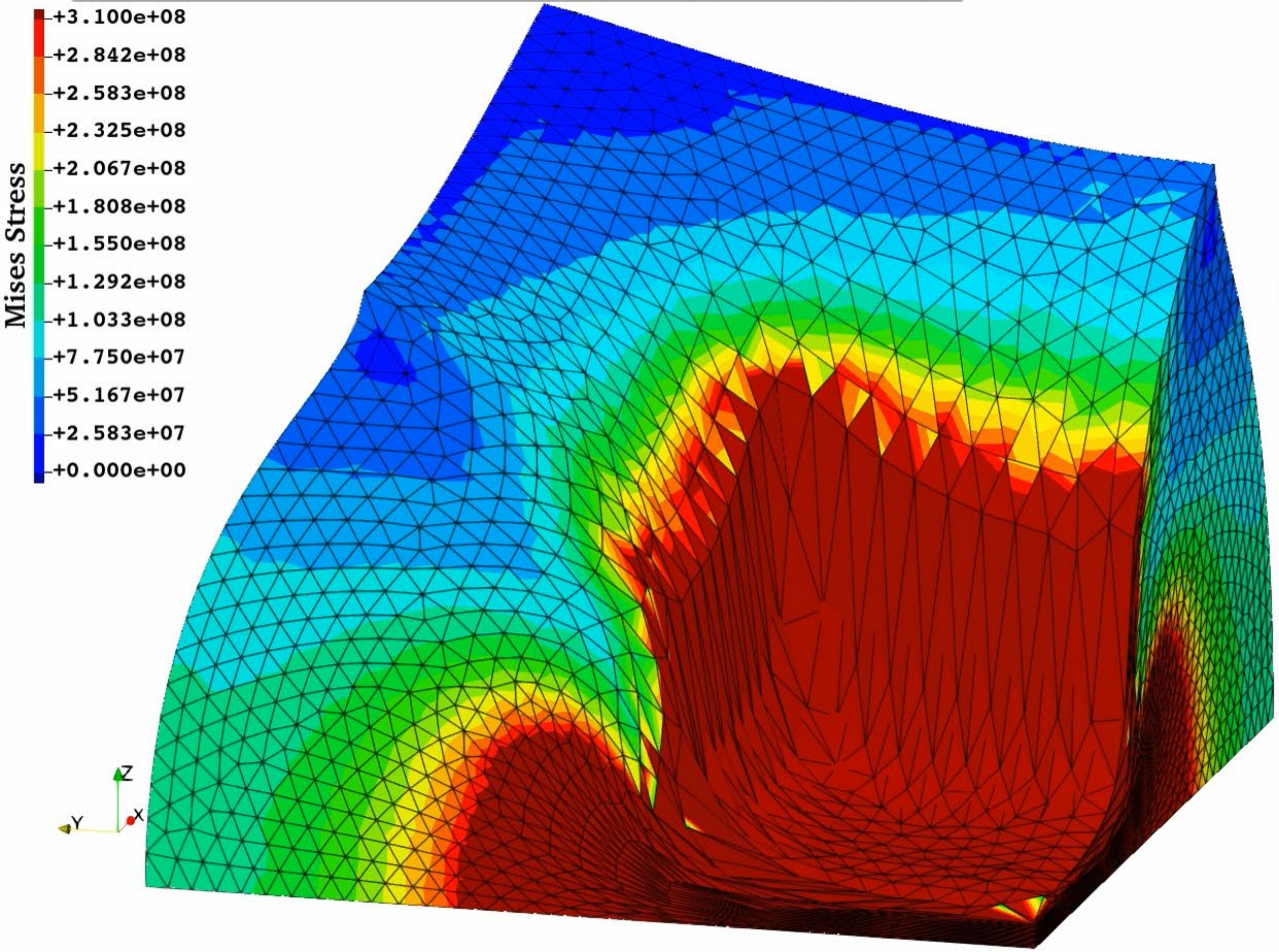
概要

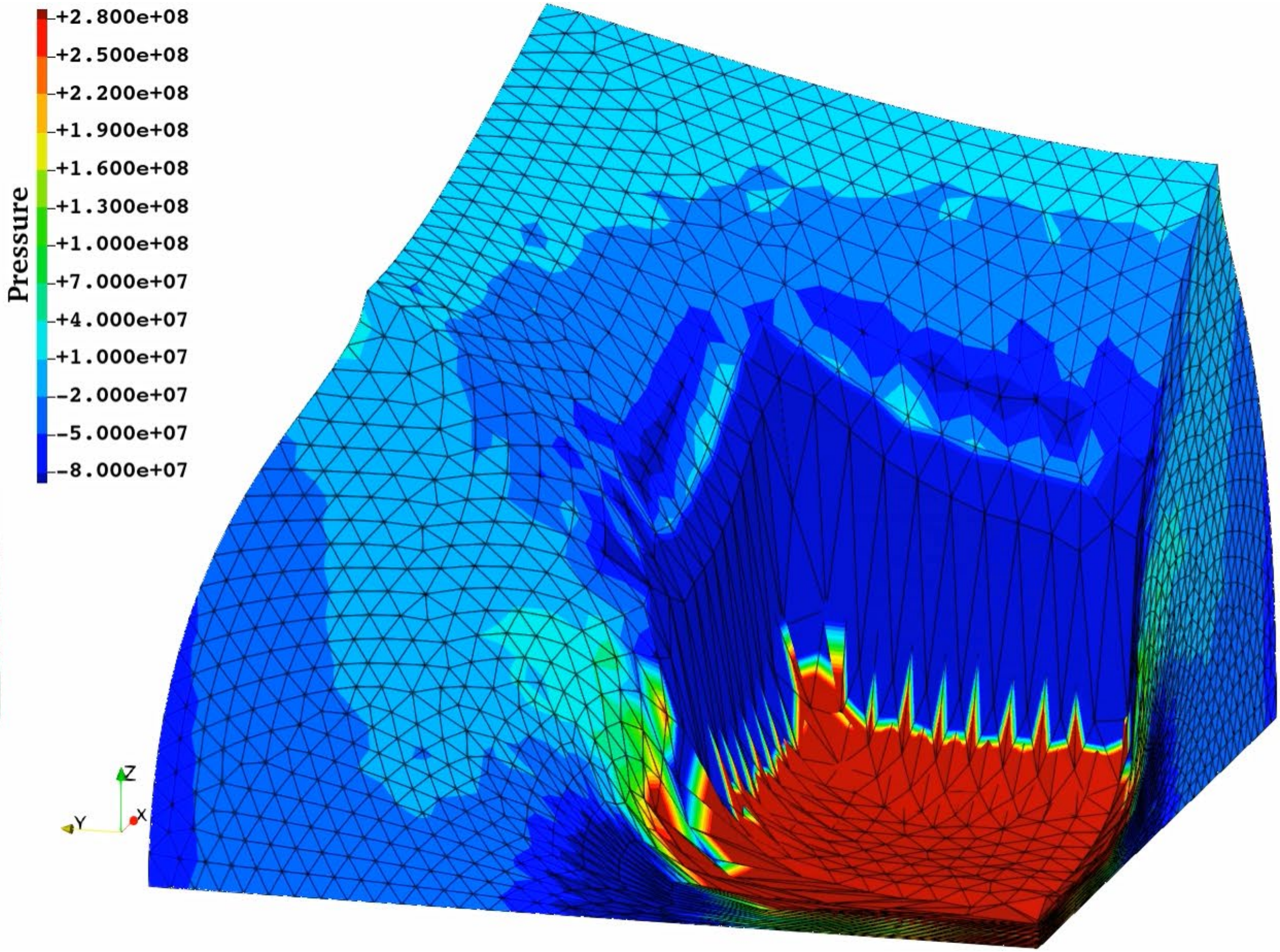


- ■ 1/4モデル.
- ■ Arruda–Boyce超弾性体 ($\nu_{\mathrm{ini}} = 0.49$).
- ■ 上面の1/4の領域に圧力を加えて押し込む.

ブロックの圧力押込解析

EC-SSE-SRI-T4の解析結果

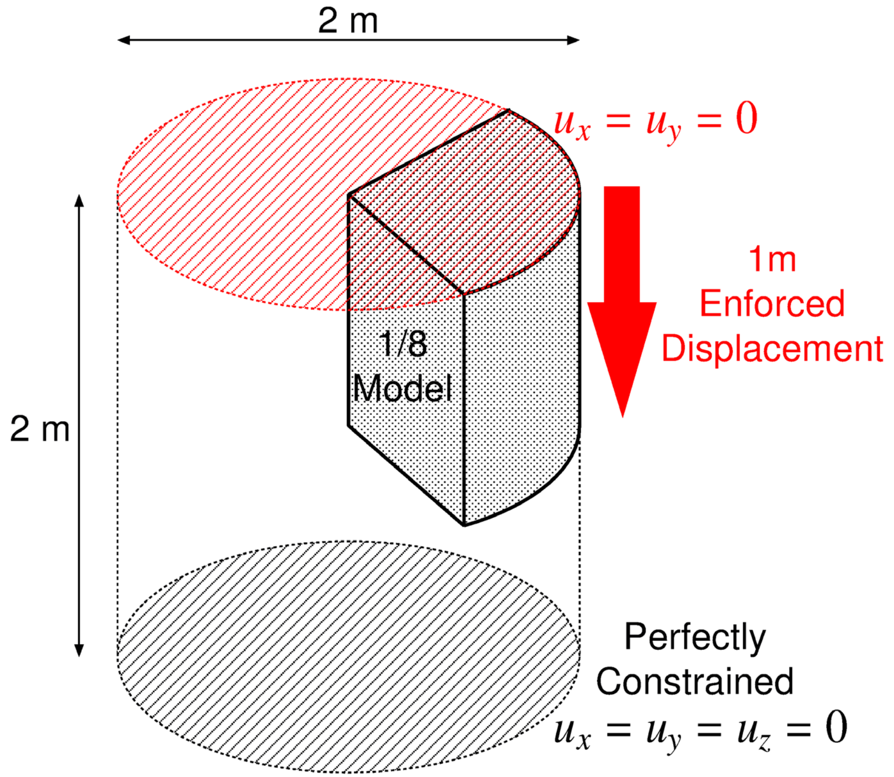




Mises応力/圧力分布に大きな問題はなく
大変形ロバスト性も充分.

円柱の押込解析

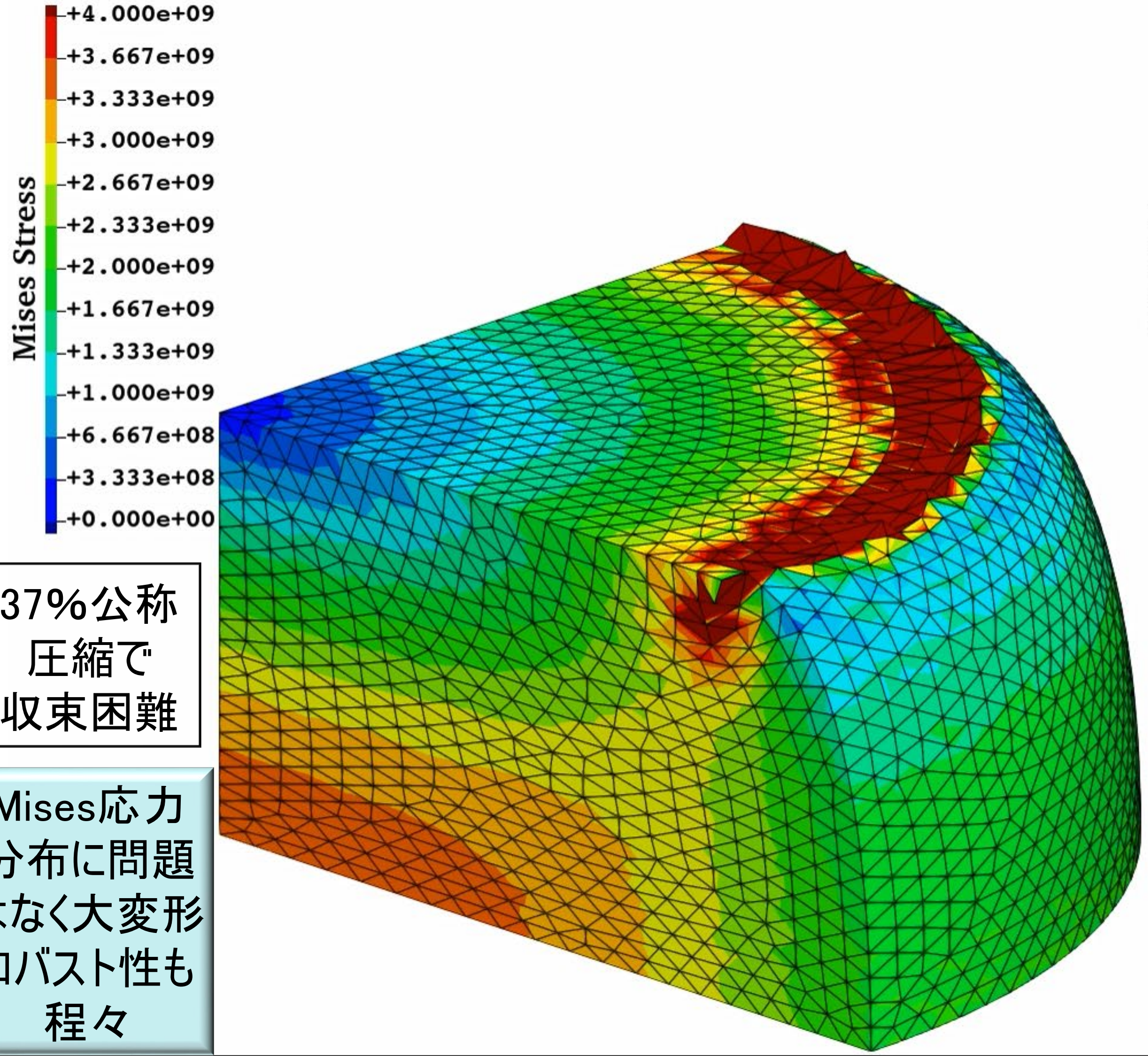
概要

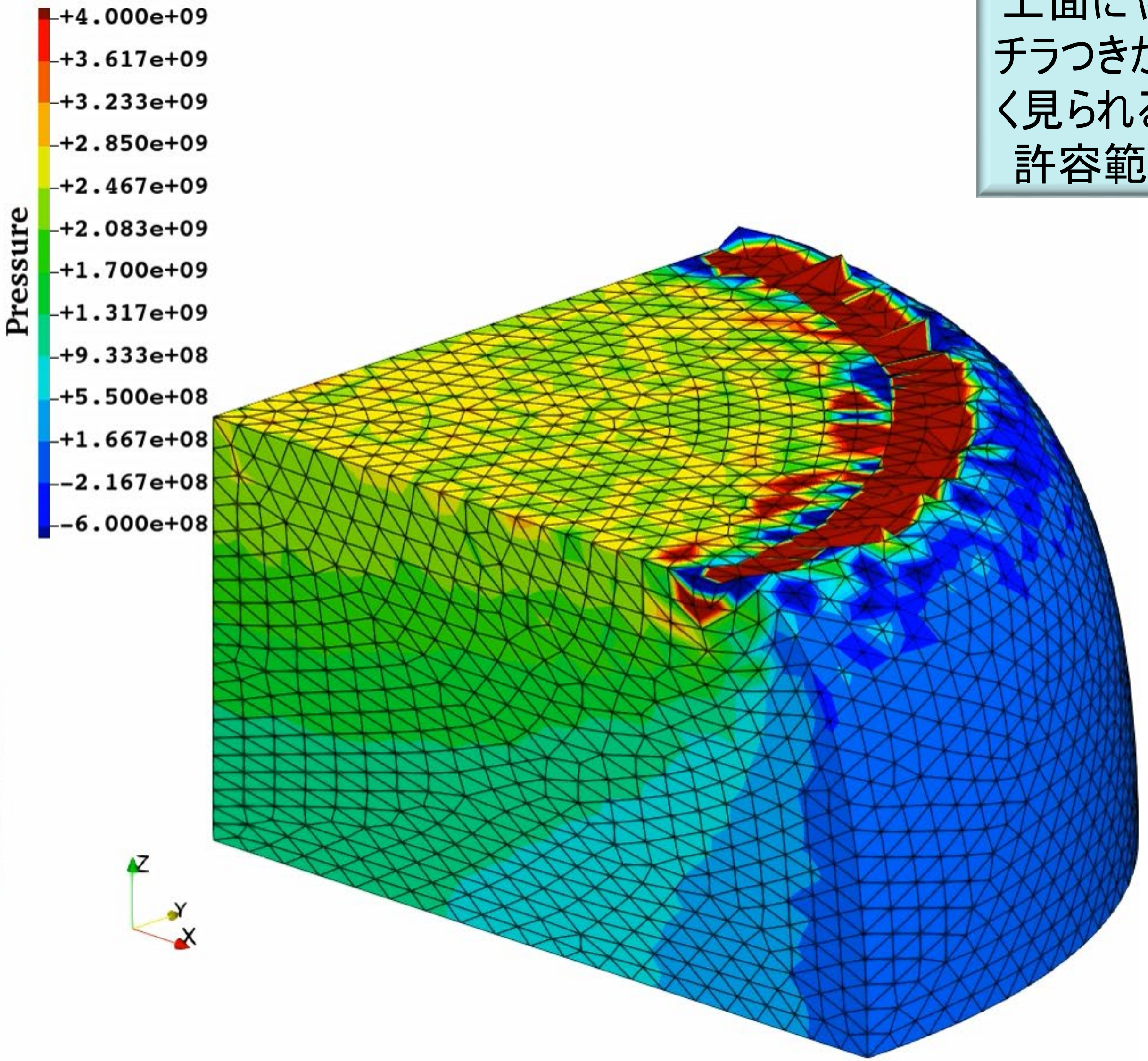


- 上面を面内拘束し軸方向に下向き強制変位.
- Neo-Hook超弾性体($E_{\text{ini}} = 6$ GPa, $\boldsymbol{\nu_{\text{ini}} = 0.49}$)

円柱の押込解析

EC-SSE-SRI-T4の解析結果





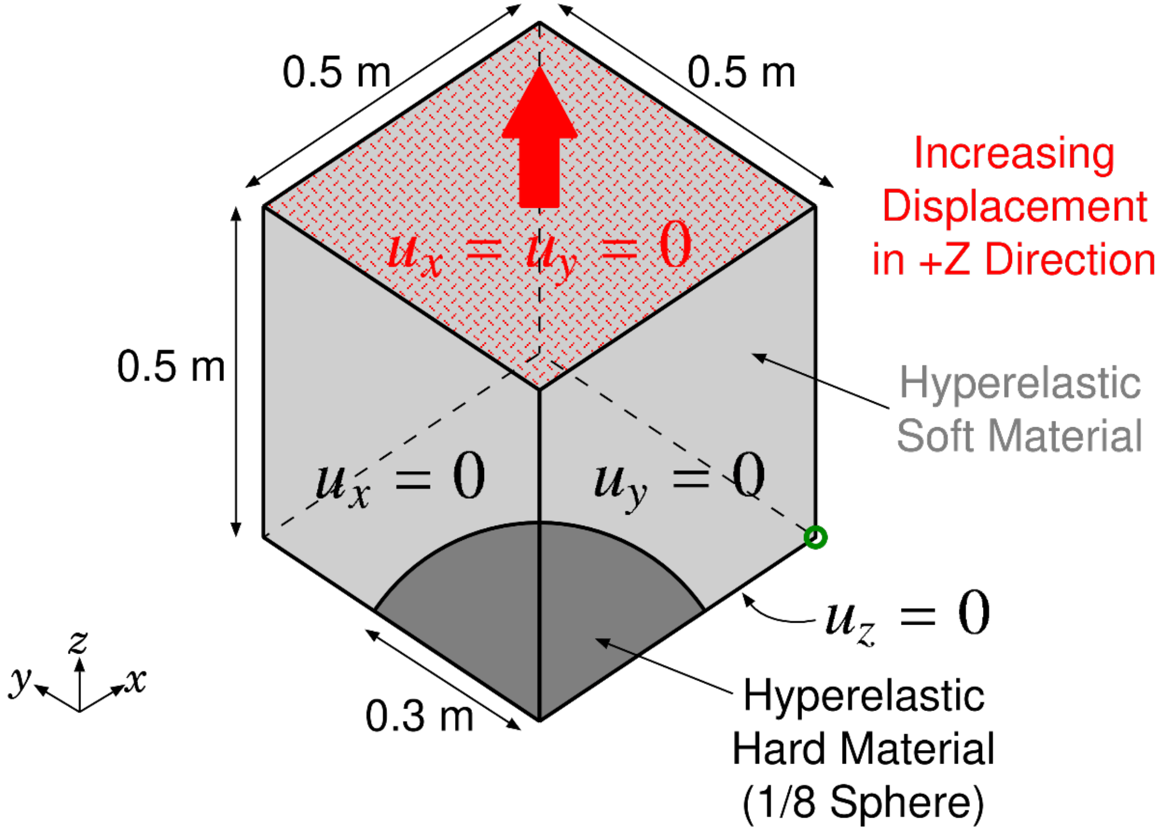
圧力分布は上面にややチラつきが多く見られるが許容範囲

37%公称圧縮で収束困難

Mises応力分布に問題はなく大変形ロバスト性も程々

フィラー充填ゴムの引張解析

概要

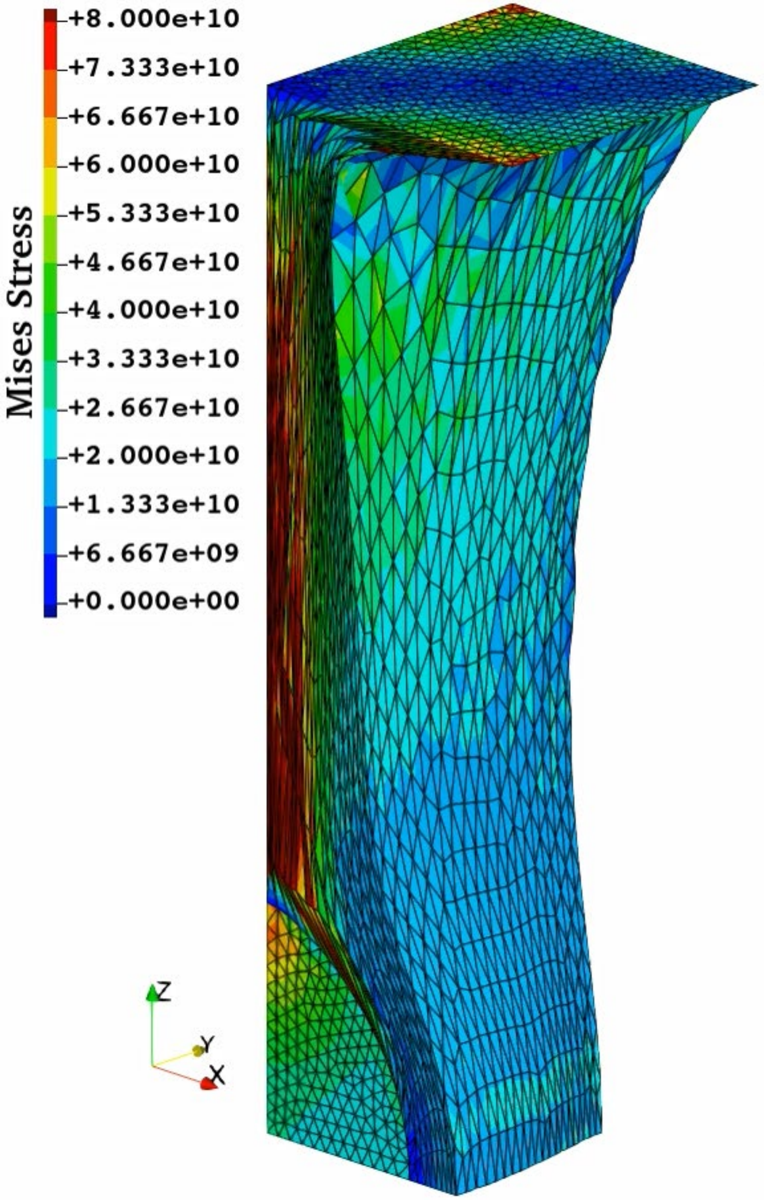


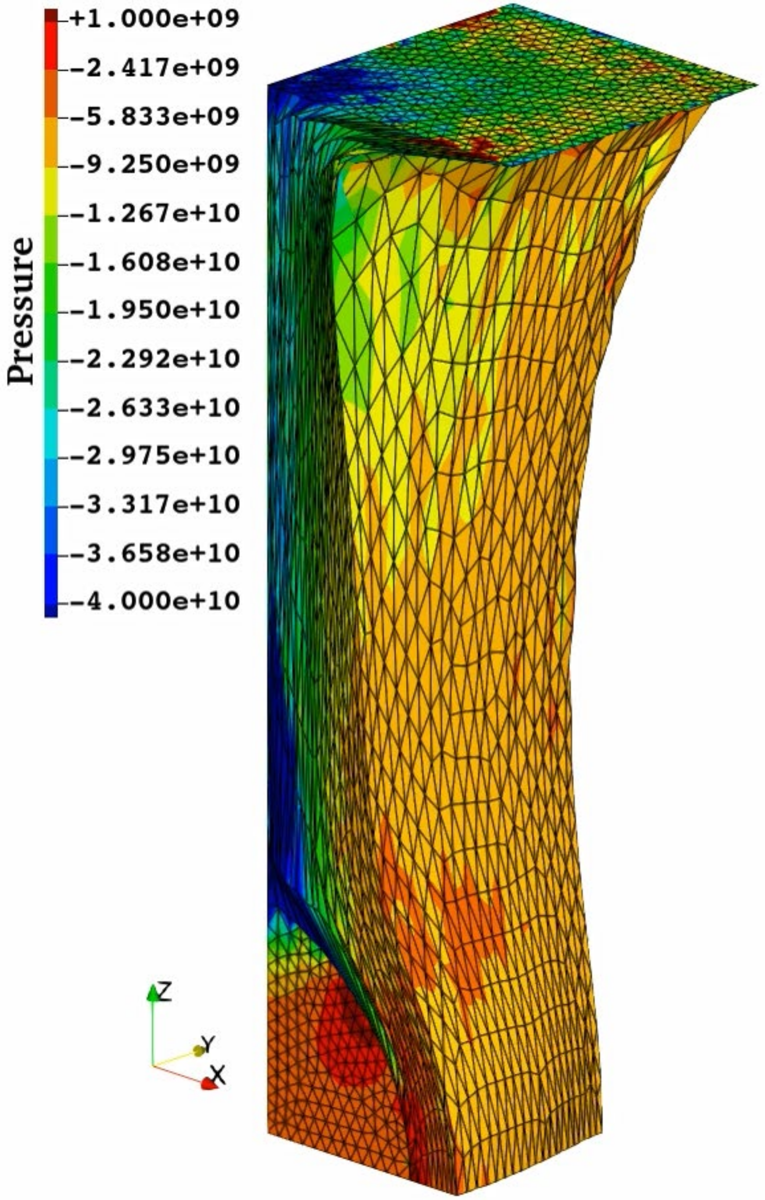
- 1/8モデル
- 鉄フィラー： Neo-Hook超弾性体（$E_{\mathrm{ini}} = 260\ \mathrm{GPa}, \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{ini}} = \mathbf{0.3}$）
- ゴム: Neo-Hook超弾性体（$E_{\mathrm{ini}} = 6\ \mathrm{GPa}, \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{ini}} = \mathbf{0.49}$）

フィラー充填ゴムの引張解析

EC-SSE-SRI-T4の解析結果

221%公称
引張で
収束困難





Mises応力分布に問題はなく，実用上充分な大変形ロバスト性がある．

圧力分布はゴム部の上面にややチラつきが多く見られるが許容範囲．

提案手法(EC-SSE-SRI-T4) の計算時間に関する考察

- 陰解法の計算時間の大部分は剛性方程式を解くことに費やされるため，剛性マトリックス$[K]$のサイズが計算時間に直結する．
- EC-SSE-SRI-T4は純粋な変位型の定式化なので，剛性マトリックス$[K]$の行数/列数（自由度の数N）はFEM-T4と全く同じ．
- EC-SSE-SRI-T4は要素をまたぐ歪み平滑化を行うため，剛性マトリックス$[K]$のバンド幅はFEM-T4の約6.7倍になる．

定式化	$[K]$のバンド幅	対FEM-T4比
FEM-T4	約14節点×3自由度	1
FEM-T10	約28節点×3自由度	2.0
ES-FEM-T4	約45節点×3自由度	3.2
NS-FEM-T4	約60節点×3自由度	4.3
EC-SSE-T4, EC-SSE-T4-SRI	約94節点×3自由度	6.7

- 従って，EC-SSE-SRI-T4の計算時間は同メッシュのFEM-T4の約6.7倍になる．

提案手法(EC-SSE-SRI-T4) の計算時間に関する考察

- メッシュを細かくし，FEM-T4で計算時間を6.7倍に増やして良いなら……
  - 直接法による行列の球解を$O(N^2)$と考えると，節点数（$\propto N$）を2.6倍に増やせる.
    ⟹メッシュ長（節点間距離）を0.7倍に小さく出来るだけ.
    ⟹せん断ロッキングを回避するにも程遠い.
  - 微圧縮解析の体積ロッキングを回避するには，もっと猛烈に細かいメッシュ分割が必要.
  - メッシュを幾ら細かくしても，微圧縮解析の圧力チェッカーボーディングはそもそも防げない.
- かと言って，提案手法の計算時間が余りにも遅いと，業務時間内に計算結果が得られないので，遅いにも限度はある.

「FEM-T4の6.7倍の計算時間」は
多くの問題で許容範囲内だと思うのですが，
皆様はどう思われますでしょうか？

まとめ

EC-SSE-SRI-T4のまとめ

- 次世代平滑化有限要素法であるEC-SSE-T4を改良した新たなS-FEM定式化「EC-SSE-SRI-T4」を開発し，その性能を評価した．
- せん断/体積ロッキングを回避し，ポアソン比**0.49**までの微圧縮問題で実用上問題ないレベルまで圧力チェッカーボーディングを抑制した．
- 比較的優秀な大変形ロバスト性も確保された．
- 同メッシュでの計算時間はFEM-T4の約6.7倍に増えるが，利用価値は充分あると考えられる．
- 圧力チェッカーボーディングをもう少し抑える方法を目下検討中．その後実用化に向かう予定．

ご清聴ありがとう御座いました．

付録

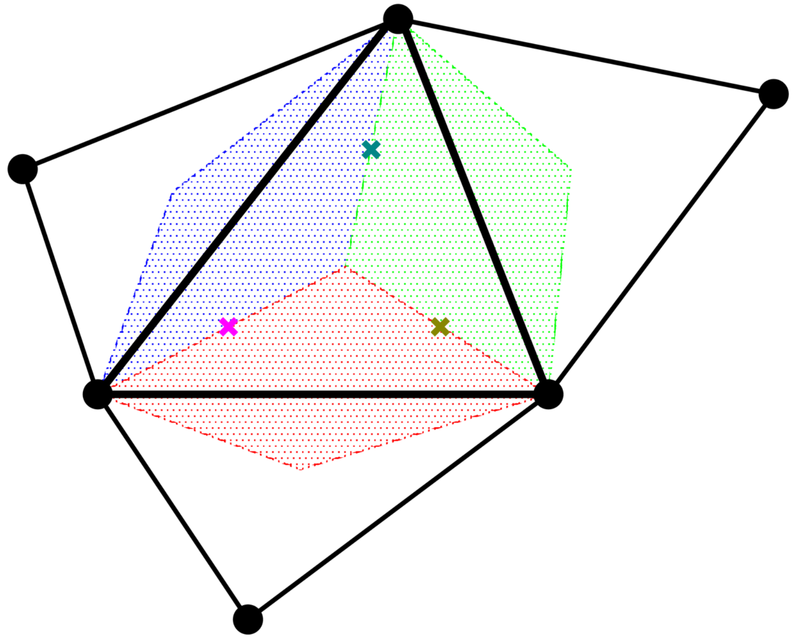
SSEの定式化概要

- ES−FEMと同じ手順で各エッジの$[{}^{\mathrm{Edge}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$は**各エッジ平滑化領域内でひと先ずは一定**だと考える.
- $[{}^{\mathrm{Edge}}B]$をセル内の**3ガウス点で平均化**して$[{}^{\mathrm{Gaus}}B]$を作る.
- $[{}^{\mathrm{Gaus}}B]$を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し，三角形2次要素と同様にガウスの3点積分で節点内力を計算する.

簡単のため
２次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ひずみ平滑化を
２回行って
ガウス点で
ひずみ/応力を
評価・積分する

ひずみ分布は
各セル内で線形



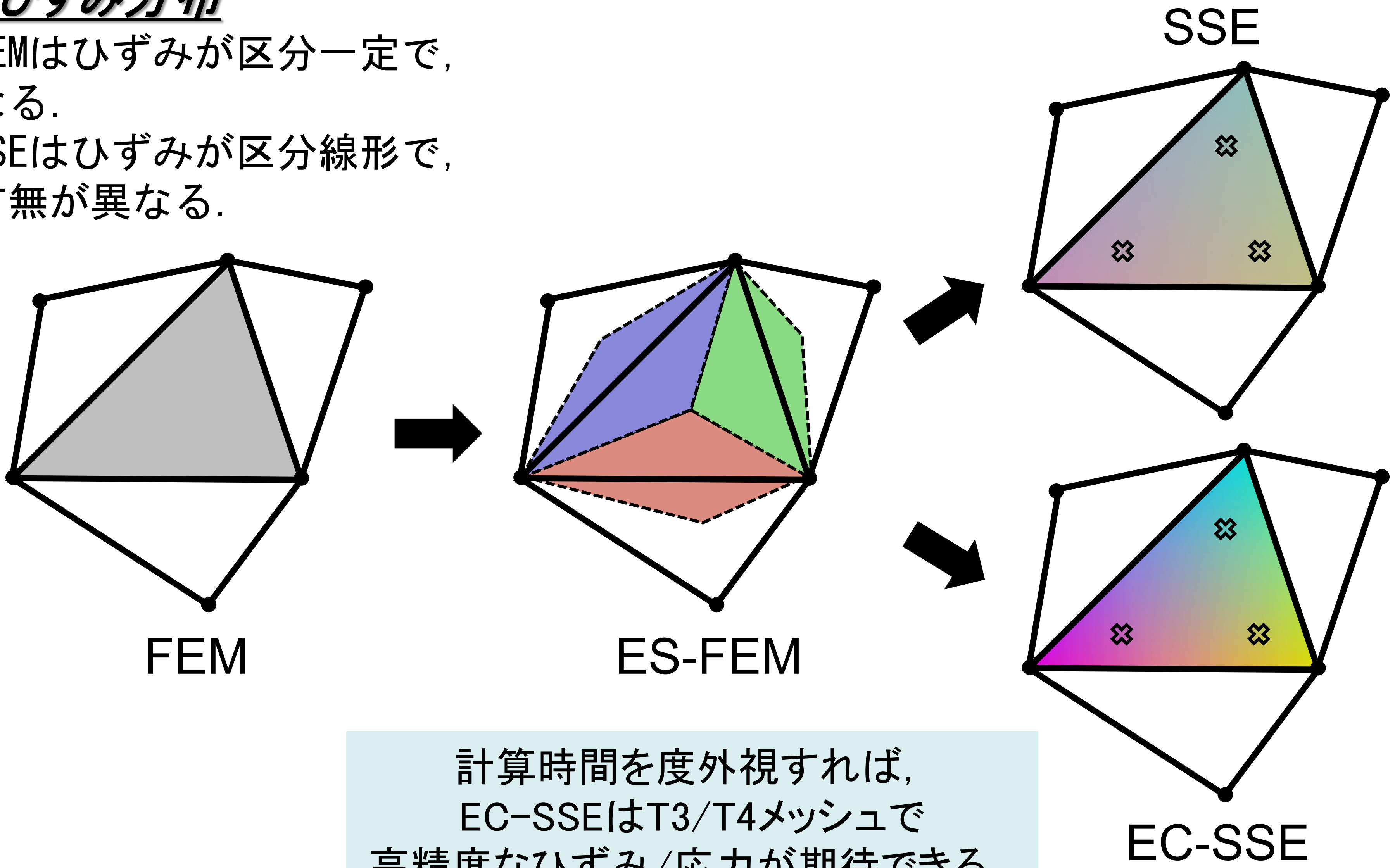
三角形/四面体メッシュで
せん断ロッキングを
回避できる上に,
ひずみ/応力の
メッシュ収束が速い.

定式化の違い

各定式化のひずみ分布

- FEMとES-FEMはひずみが区分一定で，区分が異なる．
- SSEとEC-SSEはひずみが区分線形で，連続性の有無が異なる．

簡単のため2次元の3節点三角形メッシュで説明します．



計算時間を度外視すれば，
EC-SSEはT3/T4メッシュで
高精度なひずみ/応力が期待できる．