

# 10節点四面体セルベース平滑化有限要素 (CS-FEM-T10)の性能評価

東京工業大学  
工学院 システム制御系  
大西 有希

# 研究背景

## 実現したい内容:

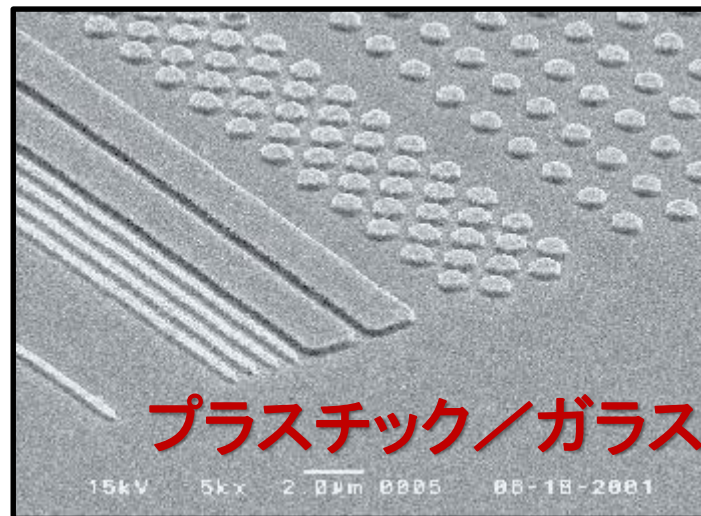
- 「超」大変形問題を高精度かつロバストに解きたい。
- 複雑形状を四面体で解きたい。
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい。
- 自動リメッシングも実現したい。
- 接触も扱いたい。



ゴム



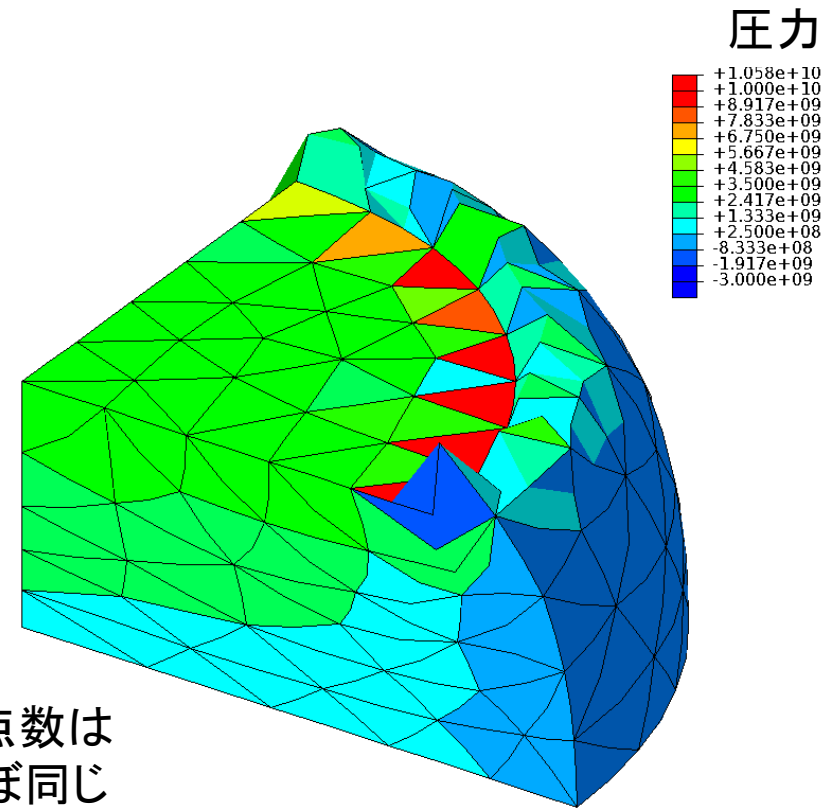
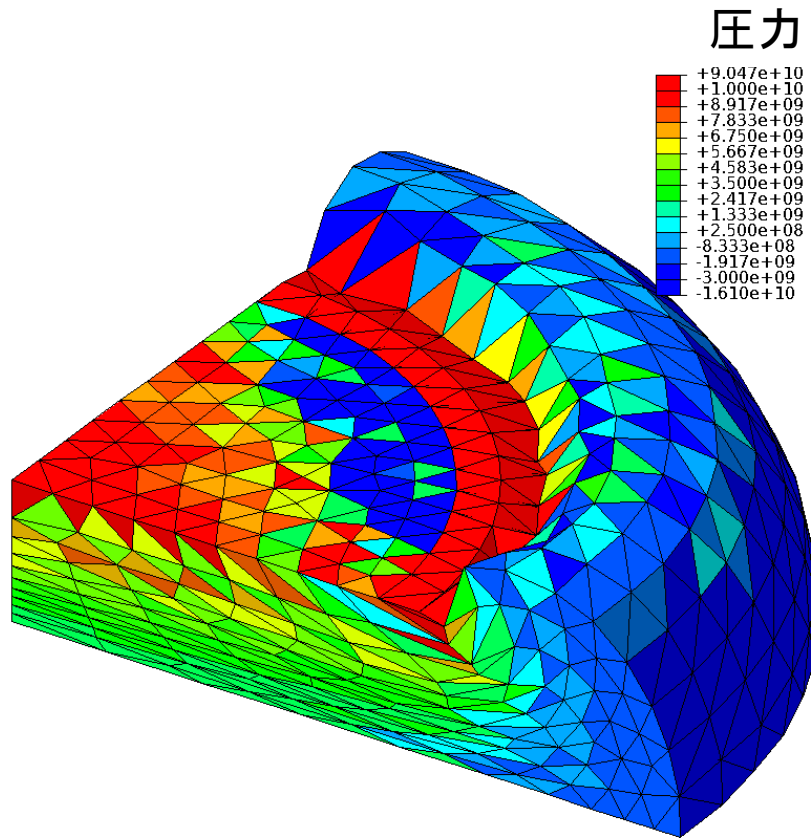
金属



プラスチック/ガラス

# 既存手法の問題点 (ABAQUSの要素)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean 超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



節点数は  
ほぼ同じ

## 四面体1次ハイブリッド要素(C3D4H)

- ✓ 体積ロッキングなし.
- ✗ 圧力振動(チェッカーボード)あり.
- ✗ せん断/コーナーロッキングあり.

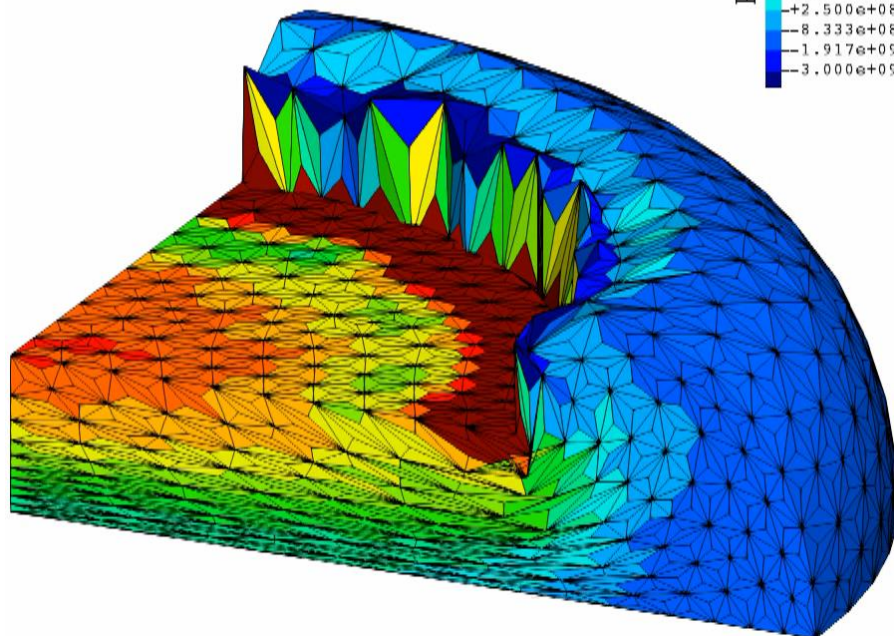
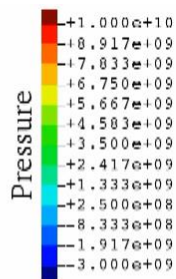
## 四面体2次修正ハイブリッド要素(C3D10MH)

- ✓ せん断/体積ロッキングなし.
- ✗ 内挿の精度低下あり.
- ✗ 大変形で早期の収束困難あり.

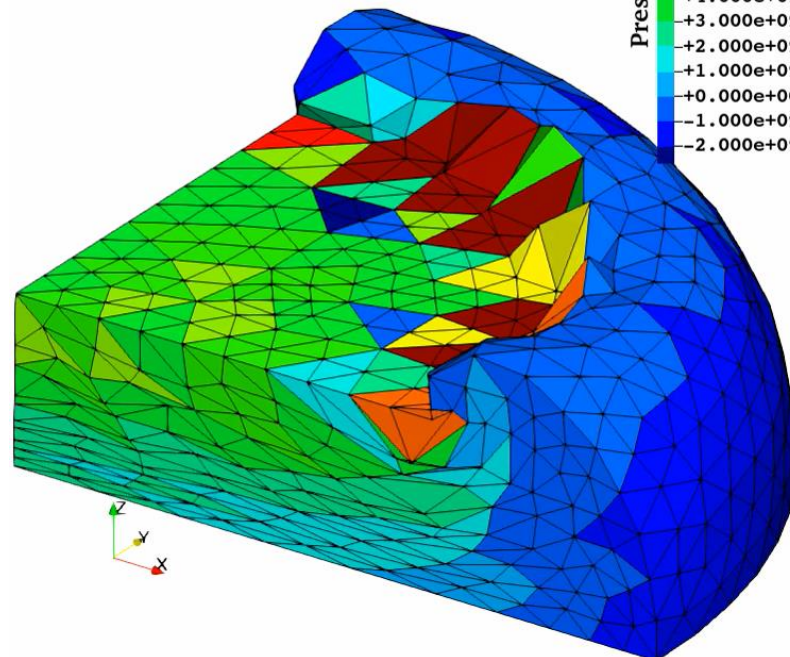
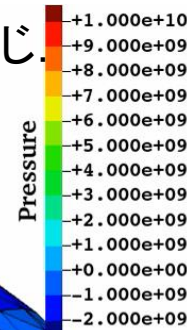
# 我々の提案手法(平滑化有限要素法)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$

メッシュは先程のC3D4Hと同じ.



メッシュは先程のC3D10MHと同じ.



## F-barES-FEM-T4

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ 圧力振動は充分小さい.
- ✓ コーナーロッキングも充分小さい.
- ✗ 計算時間, FEMとの親和性

## SelectiveCS-FEM-T10

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ 圧力振動はある程度小さい.
- ✓ コーナーロッキングもある程度小さい.
- ✓ 計算時間, FEMとの親和性

# 研究目的

10節点四面体を用いたS-FEM定式化群  
「SelectiveCS-FEM-T10s」について  
最も精度と安定性に優れる定式化を探る.

## 発表目次:

- 古典的なS-FEMの紹介
- 現状最善のSelectiveCS-FEM-T10定式化概要
- 解析例
- まとめ

# S-FEMの紹介

# Smoothed Finite Element Method (S-FEM)とは？

- G. R. Liuらが2007年に提案した新しいFEMの定式化.
- ひずみ平滑化(Strain Smoothing)手法の一種.
- 基本的なS-FEM定式化には次の4タイプがある.
  1. ノード(節点)で平滑化するタイプ (NS-FEM)
  2. エッジ(要素辺)で平滑化するタイプ (ES-FEM)
  3. フェイス(要素面)で平滑化するタイプ (FS-FEM)
  4. セル(要素内)で平滑化する (CS-FEM)
- 上記を組み合わせた多重平滑化も可能.
- さらにSelective法, B-bar法, F-bar法なども組み合わせれば定式化のバリエーションが無数に存在する.

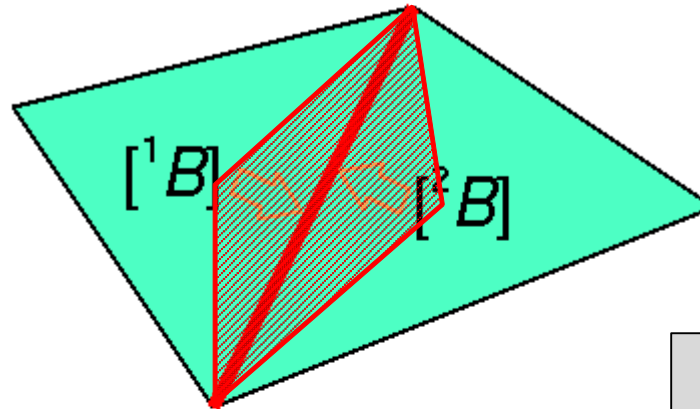
時間の都合, 2次元要素を用いた  
「ES-FEM」と「CS-FEM」のみを概説します.



# ES-FEMの定式化概要

- 各要素の $[B]$ を通常のFEMと同様に計算する.
- 要素の $[B]$ を周囲の**エッジ**に要素体積を重みとして配り,  
**エッジ**で平均化して $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- **エッジ**の平滑化領域の量として歪み, 応力, 節点内力を計算する.

積分点が  
各エッジ中心に  
あるイメージ



$[^{\text{Edge}}B]$

Edge  $T$

$\{f^{\text{int}}\}$

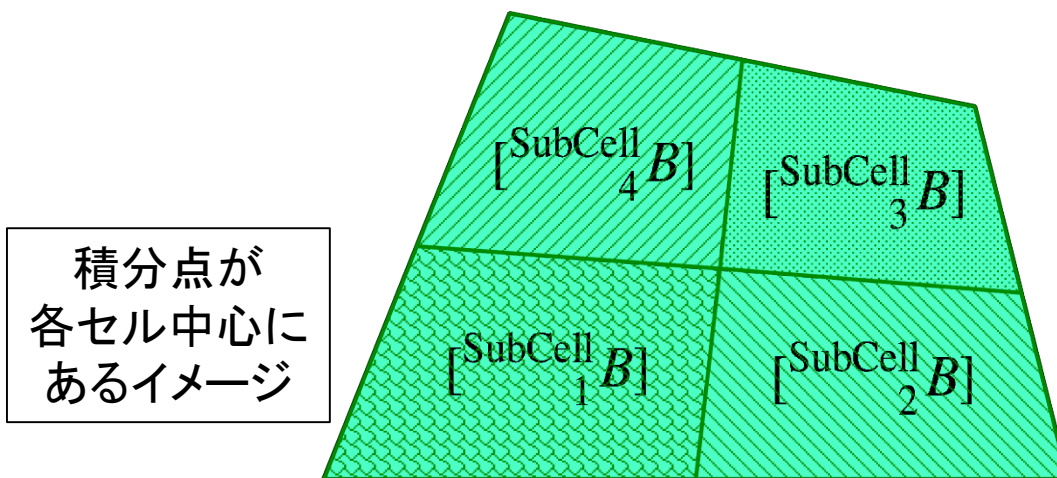
**ES-FEM**

体積ロッキングや  
圧力振動を抑える  
ことは出来ないが,  
**四面体要素で  
せん断ロッキングを  
回避できる.**



# CS-FEMの定式化の一例概要

- 歪み一定でない要素にダミー節点を追加し、サブセルに分割する。
- 各サブセルの $[SubCell B]$ を低減積分要素と同様に計算する。
- サブセルの平滑化領域の量として歪み，応力，節点内力を計算する。



$[SubCell_i B]$



SubCell $_i^T$



$\{f_{int}\}$

CS-FEM

独立した要素として  
使用できる点が  
最大のメリット。  
SRIを併用すれば  
ロッキングも回避  
できる。

# S-FEM定式化の特徴

## 【利点】

- 未知数が節点変位のみの純粋な変位形FEMである.
- 圧力や体積ひずみ等の追加変数を必要としない.
- Lagrange未定乗数法が不要となり,  
静的縮約でマトリックスの形が崩れる恐れがない上,  
動的陽解法でも微圧縮性材料が扱える.
- 混合型変分原理を用いないので実装が極めて容易.
- 低品質なメッシュでも比較的高精度な解が得られる.

# S-FEM定式化の特徴

## 【欠点】

- CS-FEMを除き，要素間で平滑化を行う都合上，既存FEMソフト上で「要素」として実装できない。



四面体メッシュ分割を用いてFEMソフトの「要素」として実装するためには，歪み一定の4節点四面体(T4)要素では不可能なので，10節点四面体(T10)要素を使用するのが良さそう。

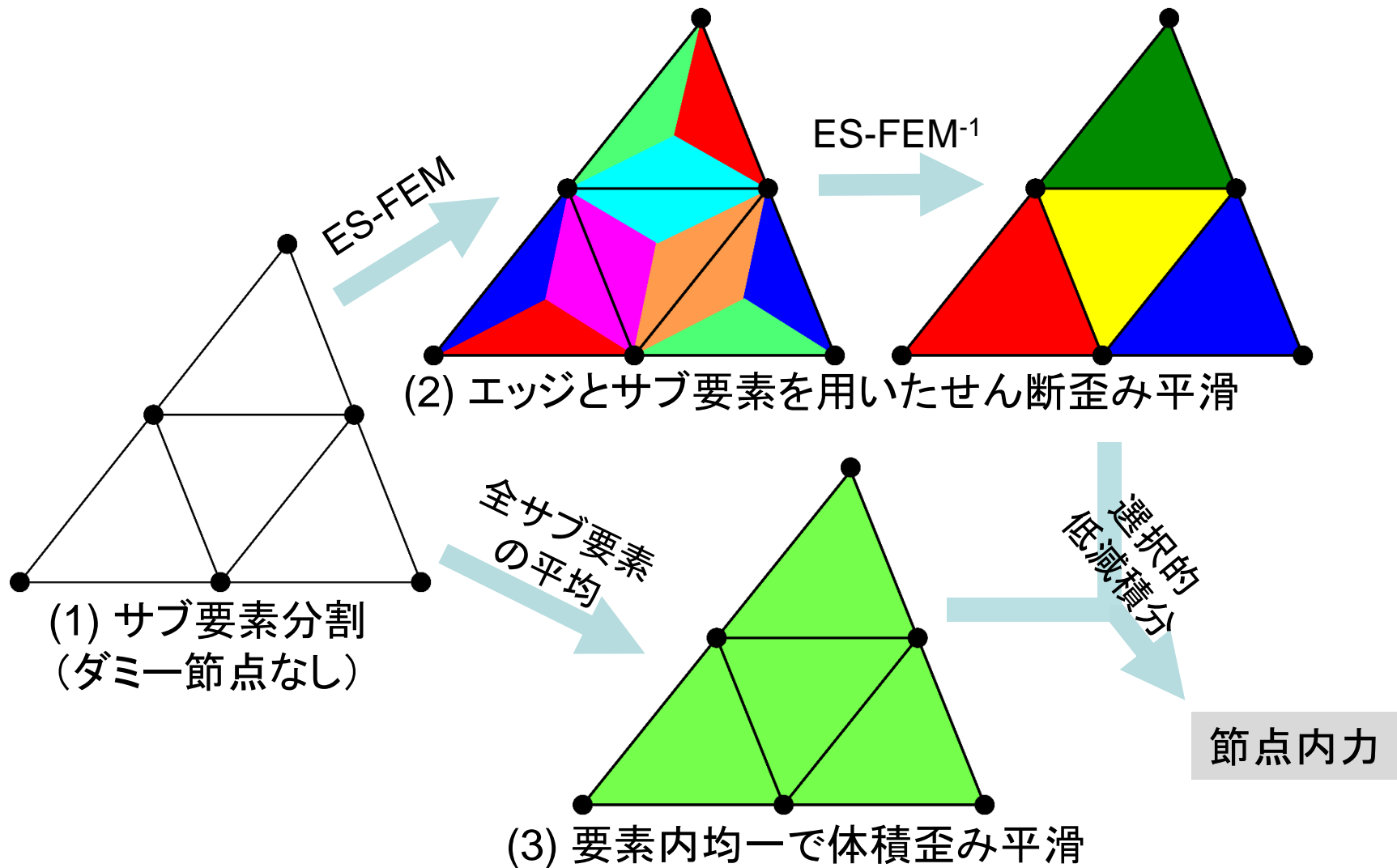


体積ロッキング対策にSRI法を導入した「SelectiveCS-FEM-T10」が有望。

# 現状最善の SelectiveCS-FEM-T10 定式化概要

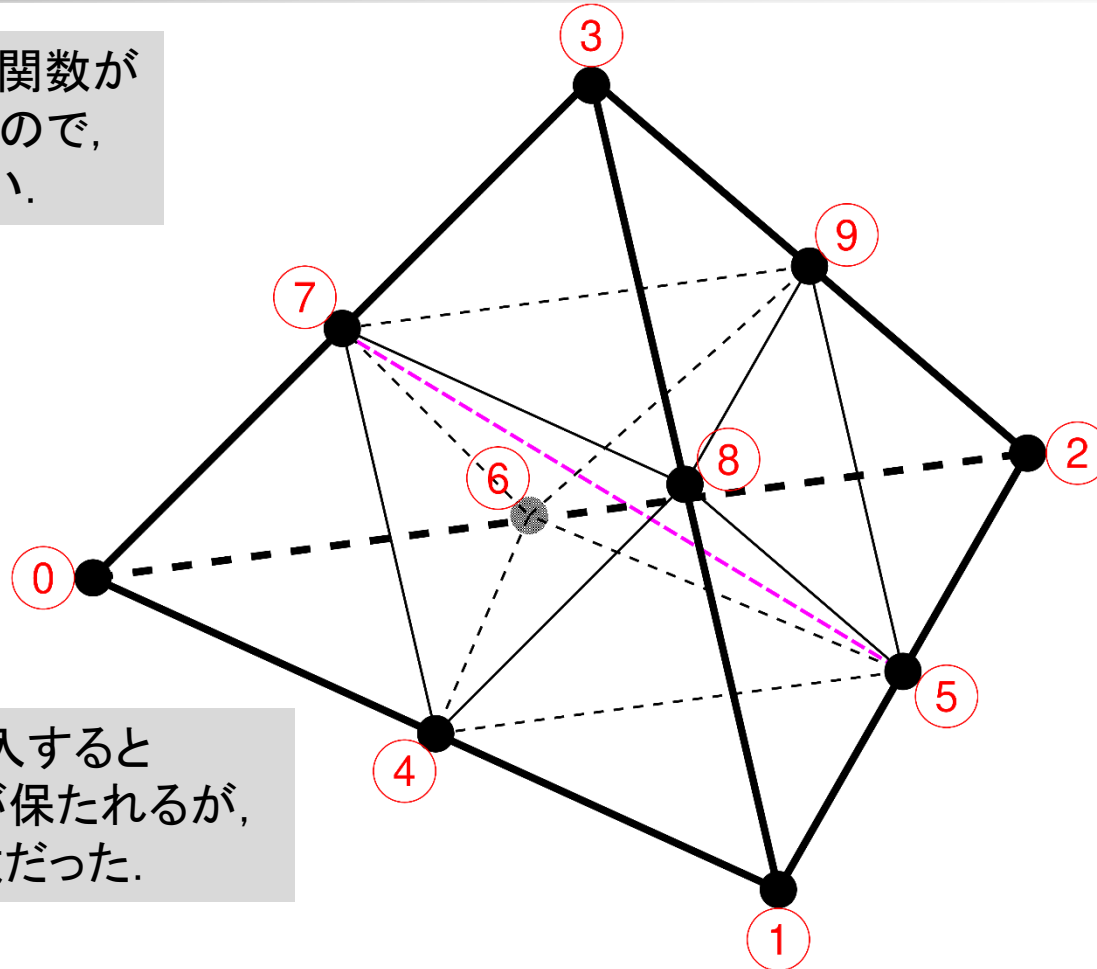
# 提案手法の定式化の流れ

(簡単のため, 6節点三角形要素で説明)



# (1) T10要素のT4サブ要素への分割

大変形では形状関数が線形の方が良いので、要素を分割したい。

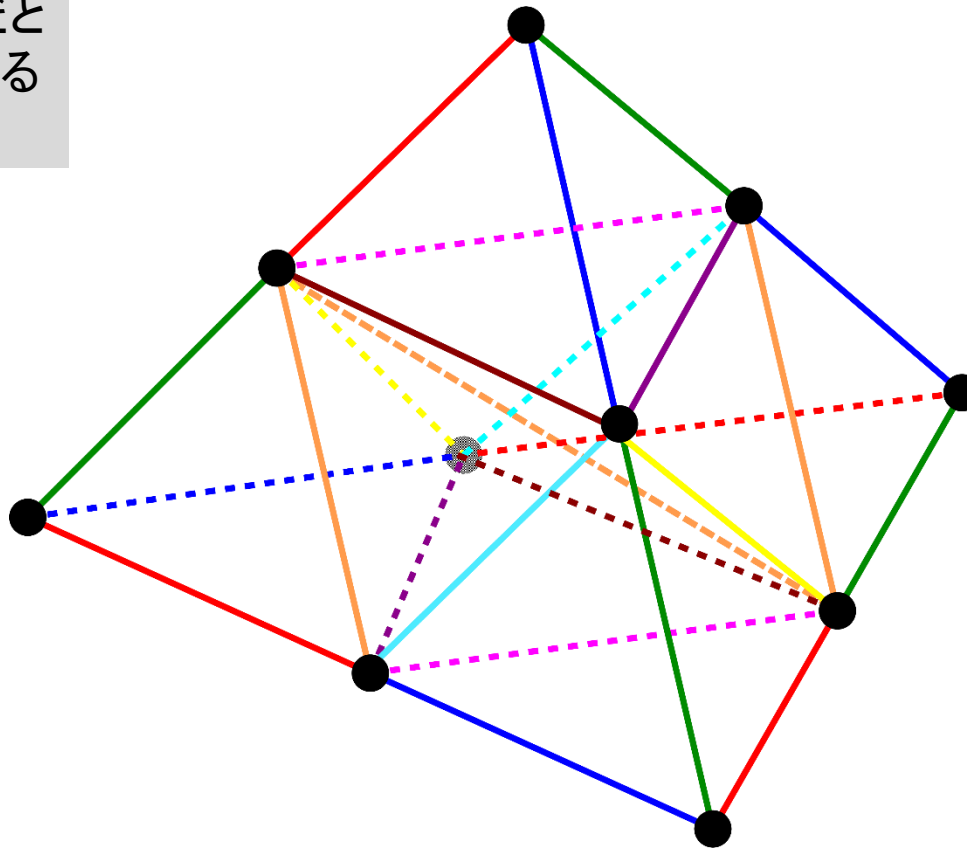


ダミー要素を導入すると要素の対称性が保たれるが、その効果は軽微だった。

- T10要素を8個のT4サブ要素に分割し、各サブ要素で  $[B]$  を求める。

## (2) 要素内歪み平滑(せん断成分)

サブ要素そのままと  
ロッキングが発生する  
ので平滑化が必要.

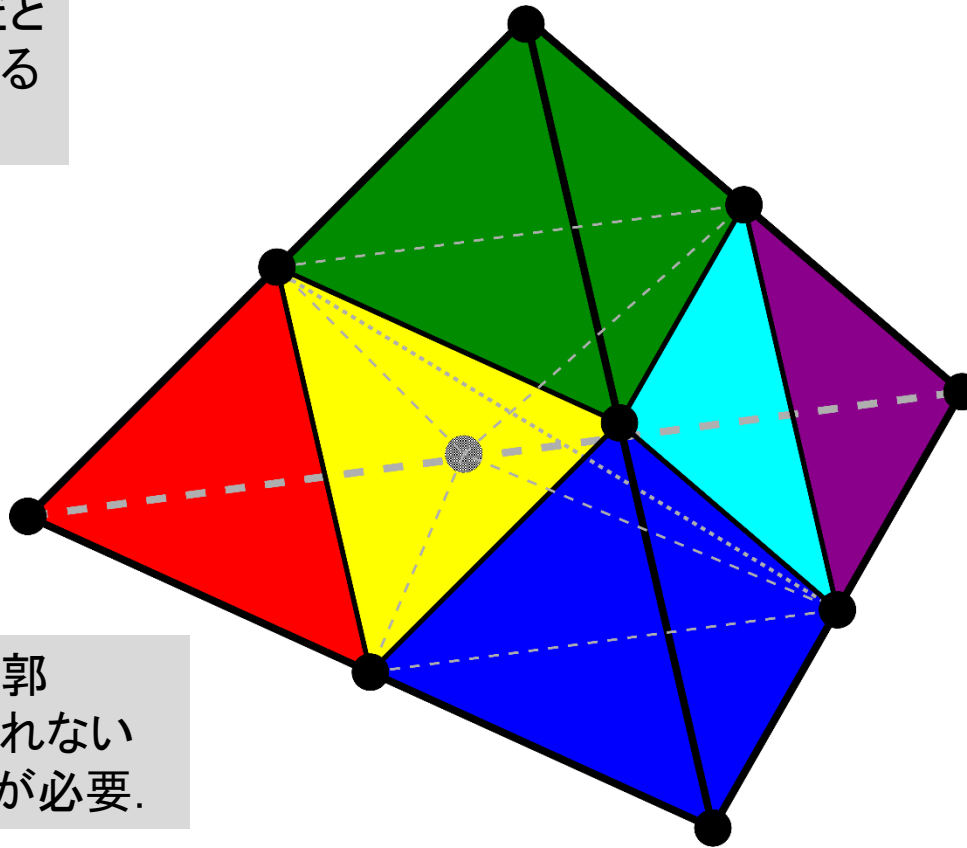


ES-FEM

- 25本のエッジを用い, ES-FEMによる(サブ要素→エッジの方向で)歪み平滑を実施. 続けて...

## (2) 要素内歪み平滑(せん断成分)

サブ要素そのままと  
ロッキングが発生する  
ので平滑化が必要.



ES-FEM<sup>-1</sup>

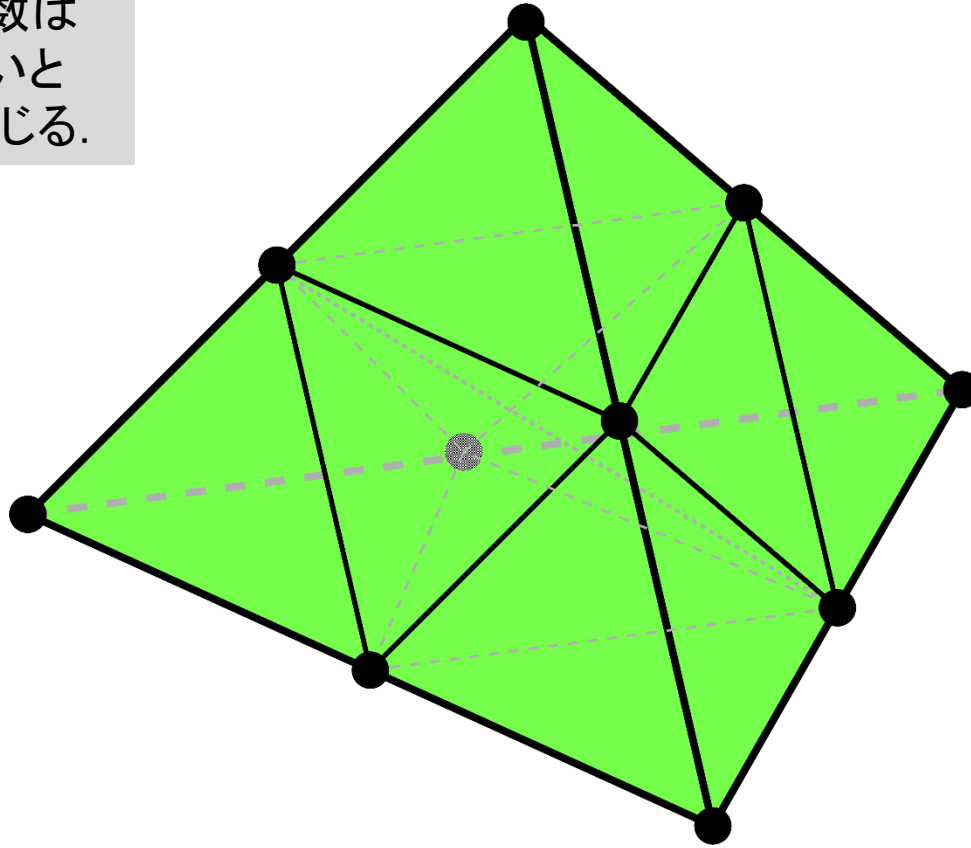
ES-FEMだけだと輪郭  
のエッジが平滑化されない  
のでもう1回平滑化が必要.

- 25本のエッジを用い, ES-FEMによる(サブ要素→エッジの方向で)歪み平滑を実施. 続けて...
- 逆手順で(エッジ→サブ要素の方向で)歪み平滑を実施.



# (3) 要素内歪み平滑(体積歪み成分)

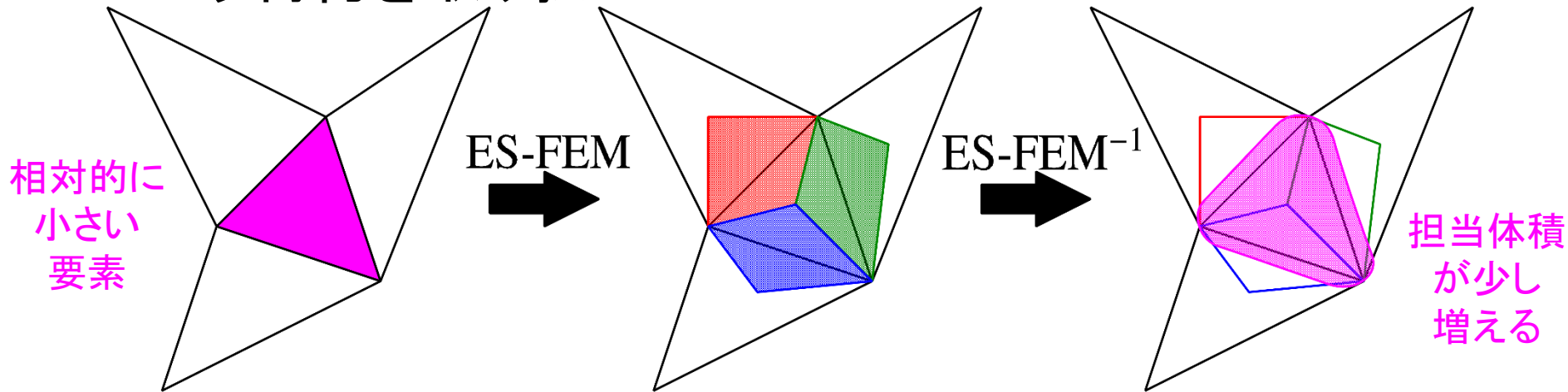
体積歪みの空間次数はせん断より落とさないと体積ロッキングが生じる.



- 全サブ要素の体積歪みの平均を要素全体の体積歪みとする(8節点六面体Selective要素と同じ発想).

# 昨年度の定式化との違い

- ES-FEM<sup>-1</sup> (エッジ→サブ要素の歪み平滑)を行う際、「サブ要素の担当体積＝元のサブ要素の体積」という制約を取り払った。

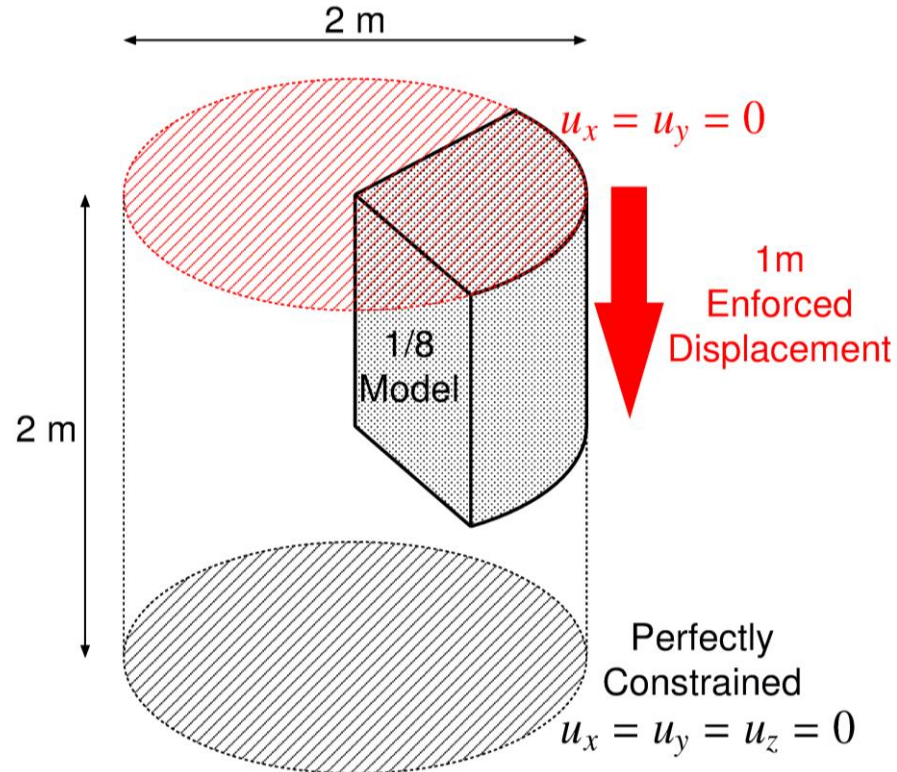


- 元のサブ要素が裏返っても(体積が負になっても)担当体積が正であれば計算を継続できるため、**ロバスト性が向上する**。(ただし、その是非は議論があるところ。)
- Partition of Unityを満たす分配なので、**体積保存は厳密に満たされる**。

# 解析例

# 超弾性1/8円柱のバレリング解析

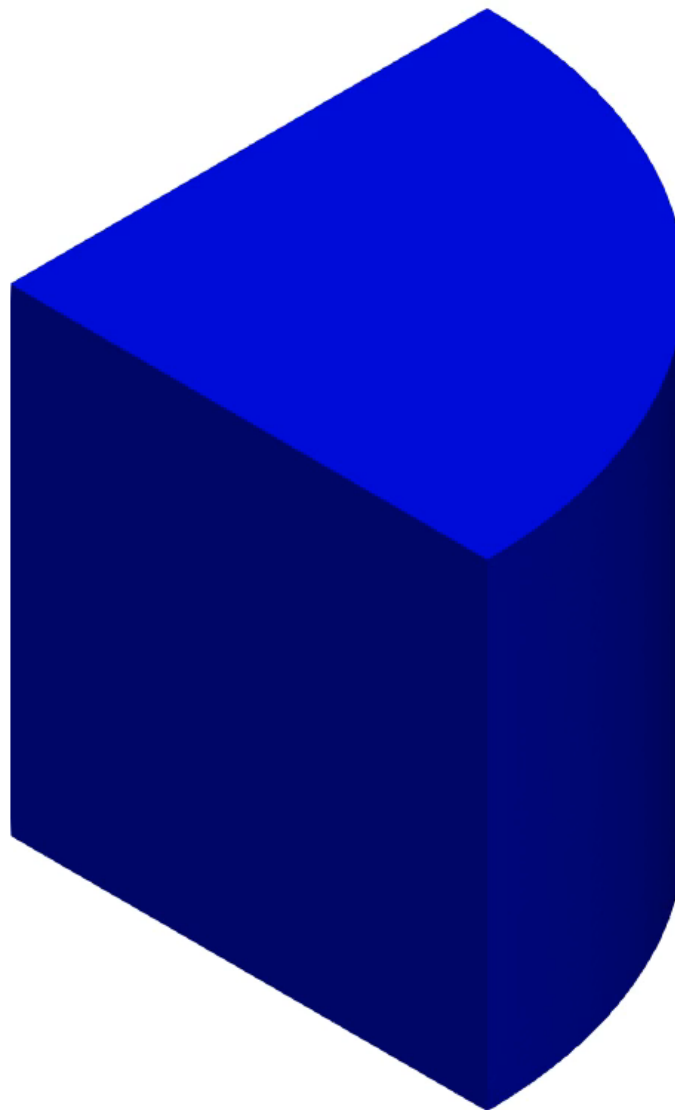
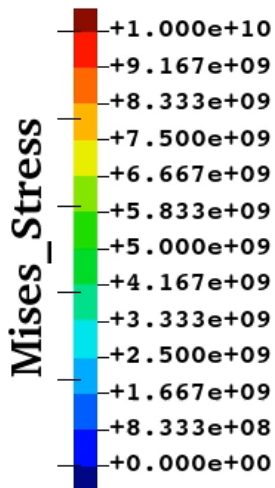
## 概要



- 上面に軸方向の**強制変位**を与えて圧縮.
- Neo-Hookean超弾性体, 初期ポアソン比 $\nu_{ini} = 0.49$ .
- 同一メッシュでABAQUSの10節点四面体ハイブリッド要素(C3D10H, C3D10MH, C3D10HS)と比較.

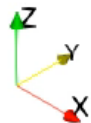
# 超弾性1/8円柱のバレリング解析

## 提案手法 の解析結果 (Mises 応力分布)



公称ひずみ  
約39%圧縮  
で収束困難

縁近傍を除き  
ほぼ滑らかな  
Mises応力分布  
が得られている。



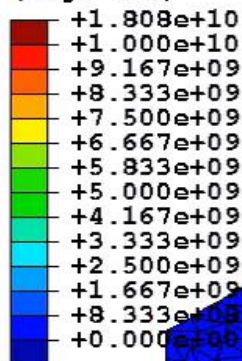
# 超弾性1/8円柱のバレリング解析v

## ABAQUS C3D10MH の解析結果 (Mises 応力分布)

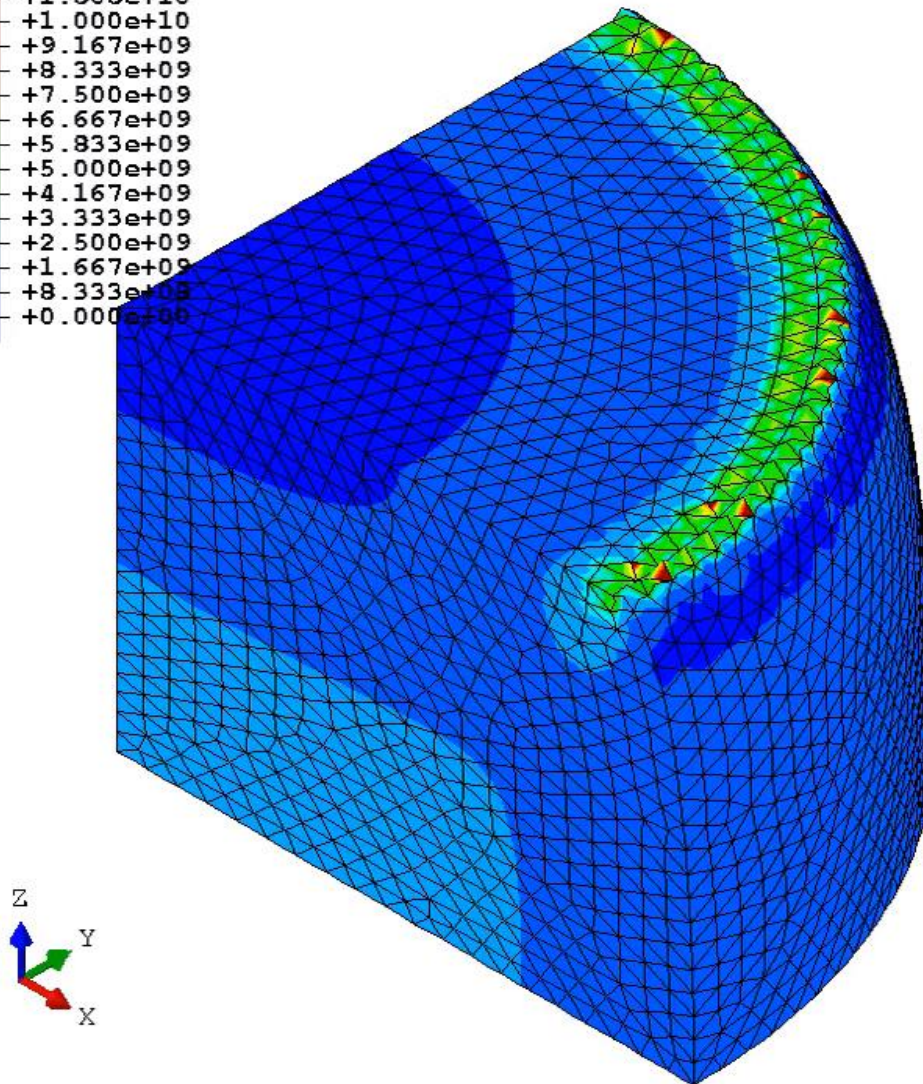
公称ひずみ  
約24%圧縮  
で収束困難

縁近傍の変形  
が奇妙に振動  
していることが  
早期収束困難  
の原因？

S, Mises  
(Avg: 75%)

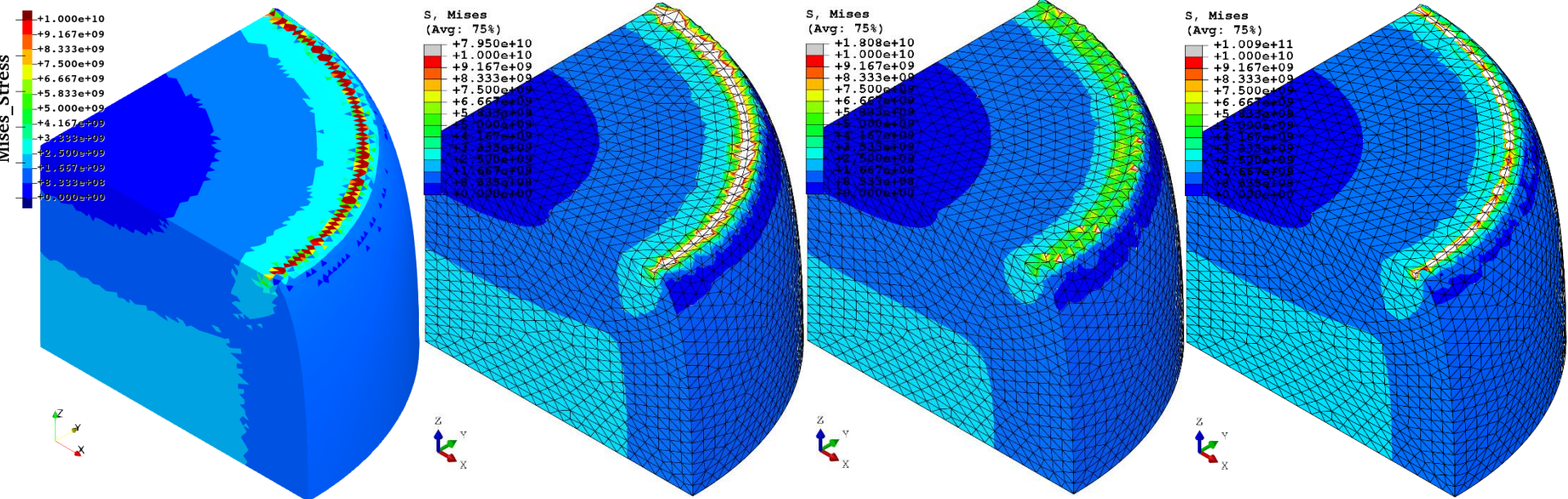


Step: Step-1 Frame: 24  
Total Time: 23.000000



# 超弾性1/8円柱のバレリング解析

## Mises応力分布 (24%圧縮)



提案手法

ABAQUS  
C3D10H

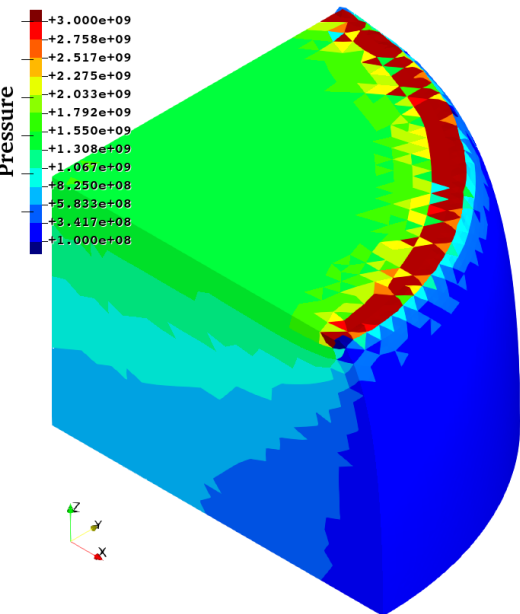
ABAQUS  
C3D10MH

ABAQUS  
C3D10HS

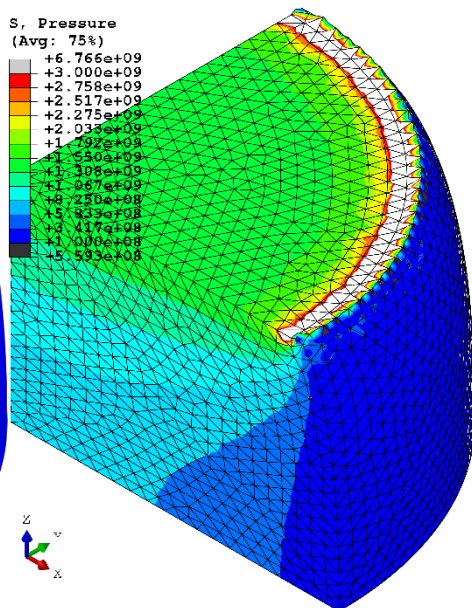
応力特異性のある縁の部分を除き、  
Mises応力分布はおよそ一致している。

# 超弾性1/8円柱のバレリング解析

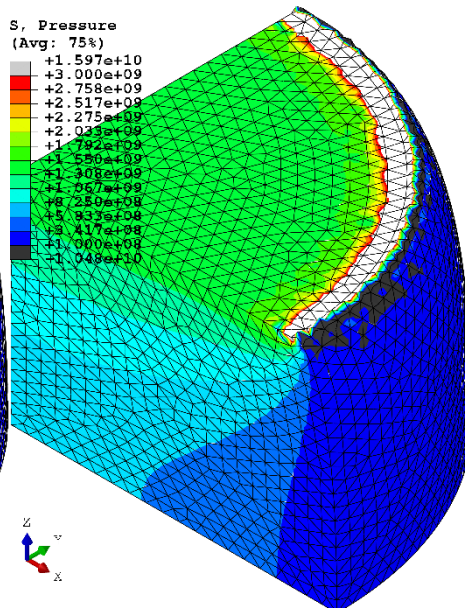
## 圧力分布 (24%圧縮)



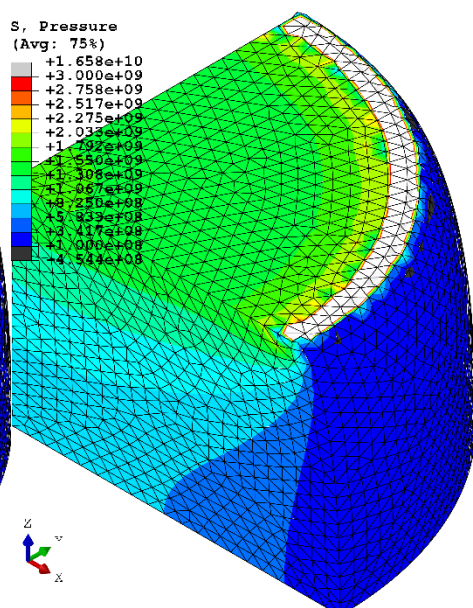
提案手法



ABAQUS  
C3D10H



ABAQUS  
C3D10MH



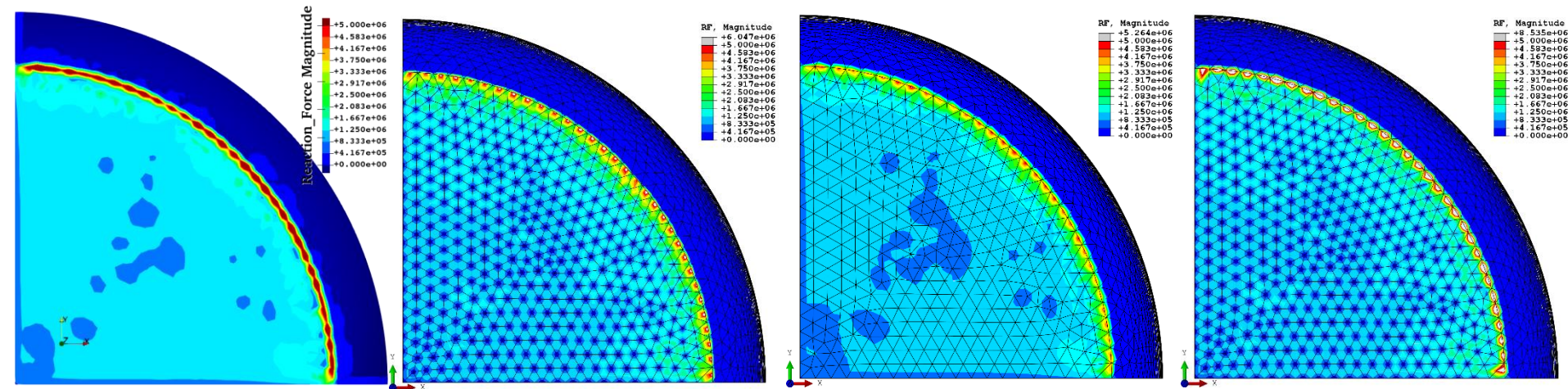
ABAQUS  
C3D10HS

応力特異性のある縁の部分を除き、  
圧力分布もおよそ一致している。



# 超弾性1/8円柱のバレリング解析

## 節点反力分布 (24%圧縮)



提案手法

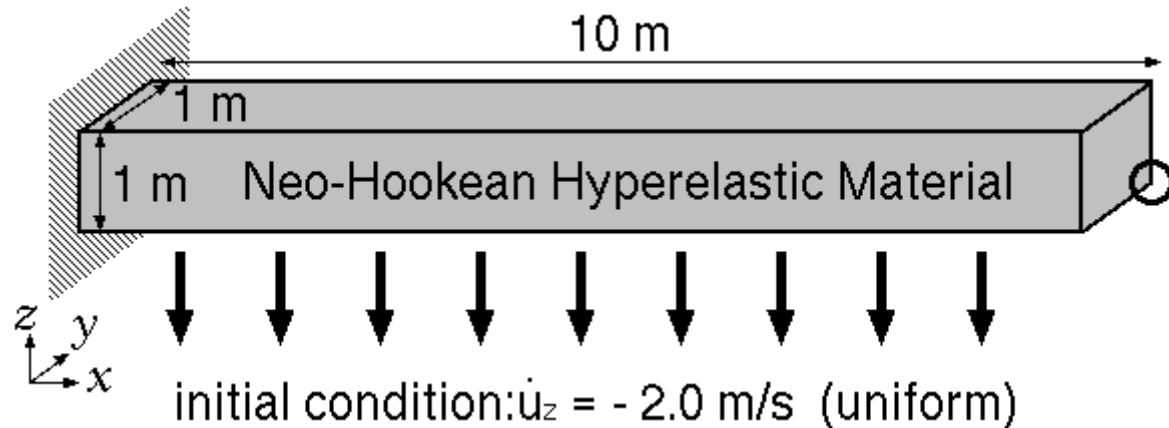
ABAQUS  
C3D10H

ABAQUS  
C3D10MH

ABAQUS  
C3D10HS

ABAQUSは修正要素(C3D10MH)のみ正常で、提案手法とおよそ一致している。

# 片持ち梁の動的曲げ解析



## ■ 動的陽解法.

$\Delta t = 0.0001$  s (一定) で 50 s までの 50 万時間ステップ.

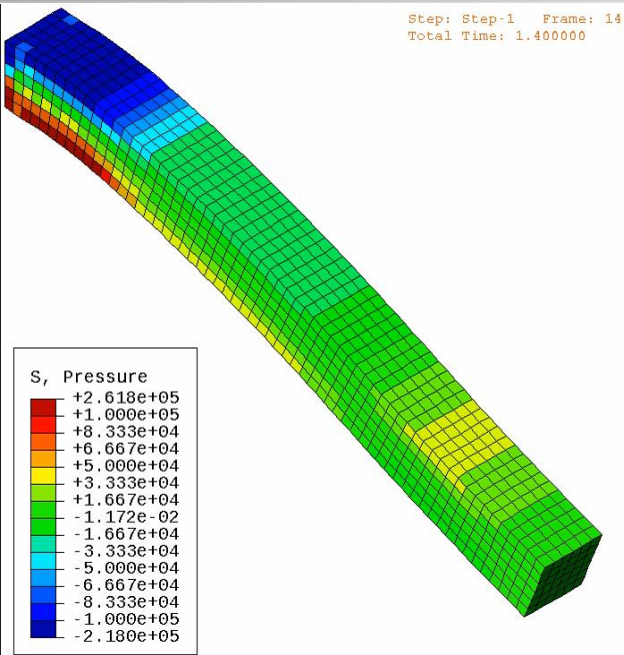
## ■ Neo-Hooke 超弾性体.

初期ヤング率: 6 MPa, 初期ポアソン比: **0.49**,  
質量密度:  $920$  kg/m<sup>3</sup>.

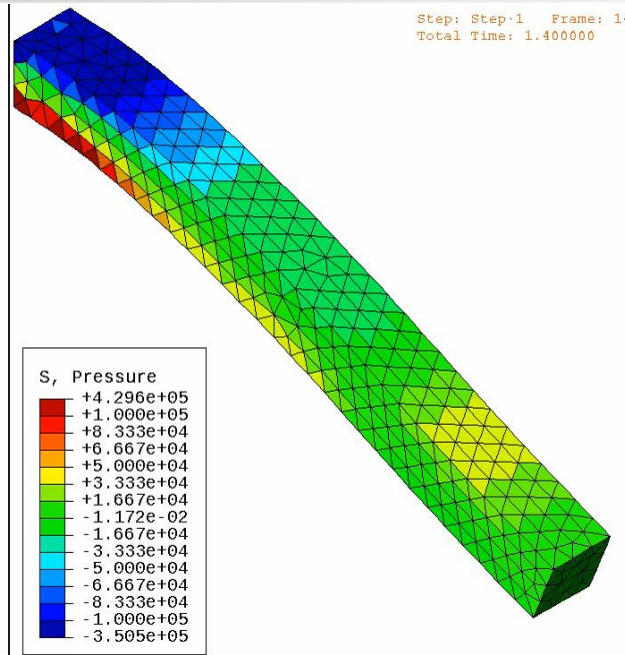
## ■ 同一 T10 メッシュで ABAQUS/Explicit C3D10M と提案手法とで結果を比較.

## ■ 参照解として ABAQUS/Explicit C3D8 の解を用意.

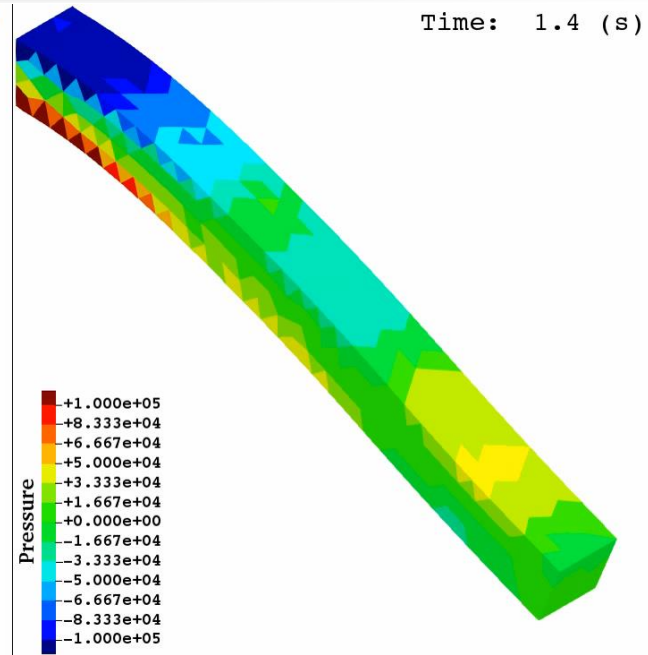
# 片持ち梁の動的曲げ解析



ABAQUS/Explicit C3D8  
(参照解)



ABAQUS/Explicit C3D10M  
(既存手法)



SelectiveCS-FEM-T10  
(提案手法)

数十万時間ステップ経過すると流石に差が現れ始めるが、

動解析でも既存手法と同等の精度が得られている。

動解析での大変形ロバスト性は未検証。

# まとめ

# まとめ

- 10節点四面体を用いた新しい平滑化有限要素定式化である**SelectiveCS-FEM-T10**を紹介した.
- 担当体積の計算法を変更することで昨年度の定式化よりも**大変形のロバスト性が向上した**.
- 10節点四面体2次要素が実装されているIn-houseコードであれば、提案手法を簡単に組み込むことが出来る.
- 計算時間は10節点四面体2次要素とほぼ同じ.
- 静的・動的両方でロッキングや圧力振動を起こさない.

**皆様がご持ちのFEコードへの実装を是非ご検討ください!!**

ご清聴ありがとうございました.

