

大変形問題に対する
四面体要素を用いた
ロッキングフリー
選択的平滑化有限要素法

大西 有希, 天谷 賢治
東京工業大学

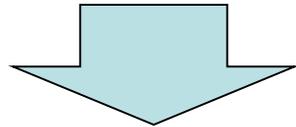


研究背景

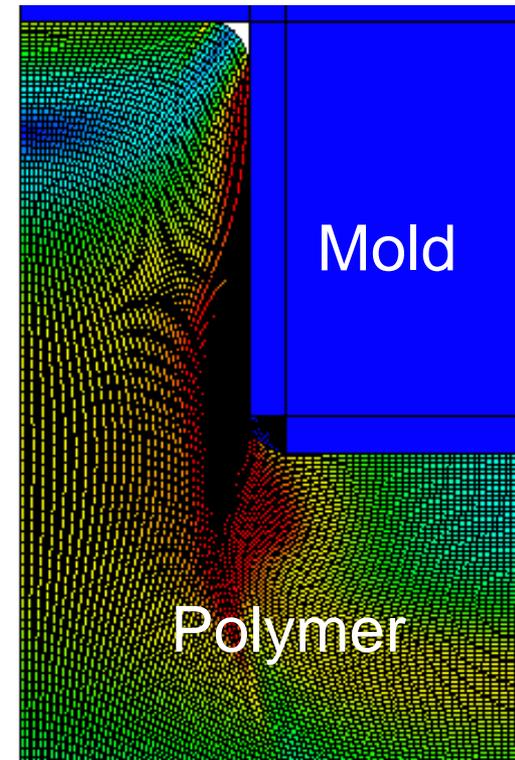
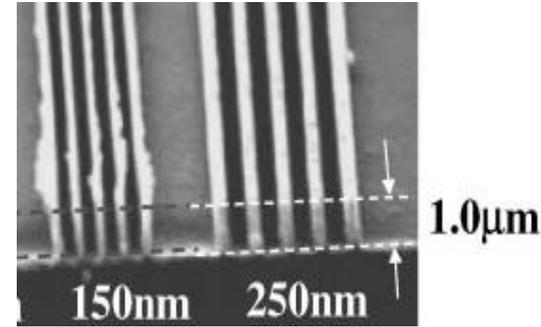
- 柔らかい材料の静的超大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。

(最終目標: タイヤゴムの大变形, 熱ナノインプリント樹脂成形など)

- メッシュ固定のFEMを使用するとメッシュがすぐに潰れてしまい, 解が得られない。

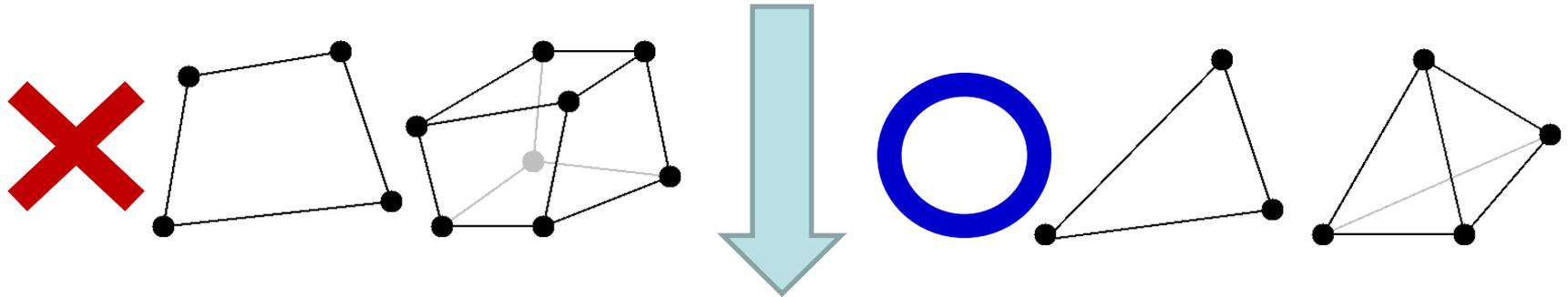


メッシュリゾーニング (メッシュを何度も切り直して計算を続行すること) が不可欠。



メッシュリゾーニングの問題点

任意の変形状態を持つ領域を良質な**四角形要素** (2D) および**六面体要素** (3D) でリメッシュすることが出来ない。



三角形要素 および **四面体要素** を使用せざるを得ない。

しかし、標準的な(定ひずみ)三角形要素および四面体要素は容易にせん断ロッキングおよび体積ロッキングを引き起こす為、低精度な解しか得ることが出来ない...

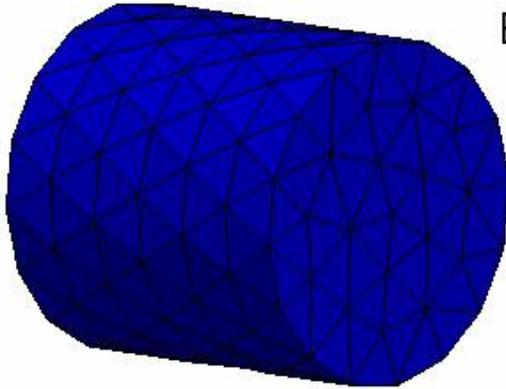
ロッキング回避のための従来法

- 高次要素:
 - ✗ 体積ロッキングを回避できない。
中間節点があるため大変形で精度悪化の恐れがある。
- 拡張ひずみ仮定法(EAS):
 - ✗ 不安定。
- B-bar法, F-bar法, 選択的次數低減積分法:
 - ✗ 四面体要素や三角形要素にはそのまま適用できない。
- F-barパッチ法:
 - ✗ 良いパッチを作ることが難しい。
- u/p混合(ハイブリッド)法:
 - ✗ 今のところ完全に満足できる定式化が提案されていない。
ただし, ほぼ許容出来るものは提案されている。
(例: ABAQUS/Standardの「C3D4H」および「C3D10H」)
- 平滑化有限要素法(Smoothed FEM: S-FEM):
 - ? 可能性を模索中。(拙著論文(IJNME 2014)を参照)

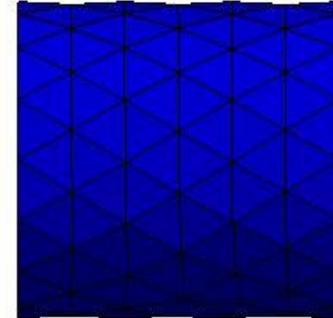
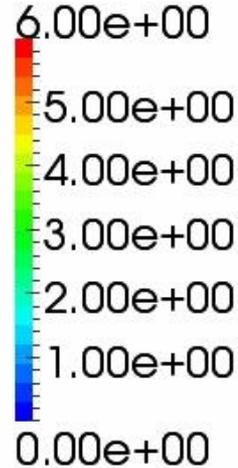


S-FEMによる解析例(弾塑性体のせん断ネッキング)

**解析
結果**



Equivalent Plastic Strain



- ・大変形
- ・静的
- ・陰解法
- ・メッシュ
リゾーニング

ネックの最終
変形(F_{zz})は
72.9. つまり
7000%超の
公称ひずみ.



研究目的

四面体要素を用いたロッキングフリー**選択的平滑化有限要素法(Selective S-FEM)**を開発し、その精度検証と改良を行う。

今日はメッシュリゾーニングの話を一時棚上げにします。

発表目次

- Selective S-FEMの定式化おさらい
- 解析例と問題点の整理
- 問題解決への取り組み(検討中の手法の速報)
- まとめ

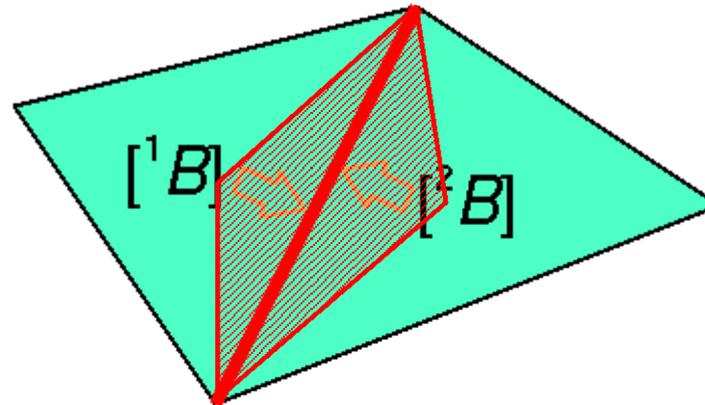


Selective S-FEMの定式化おさらい

Edge-based S-FEM (ES-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するエッジに面積比で分配し, $[^{\text{Edge}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$ 等をエッジで計算.

概して高精度だが、体積ロッキングを起こすのが欠点



$[^{\text{Edge}} B]$

Edge T

$\{f^{\text{int}}\}$

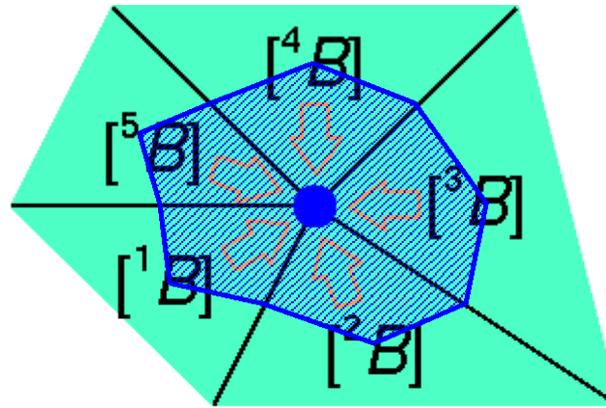
ES-FEM

「エッジ」を「フェイス」
と読み替えば
FS-FEM for 3D

Node-based S-FEM (NS-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するノードに面積比で分配し, $[^{\text{Node}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$ 等をノードで計算.

せん断・体積ロッキングを起こさないが, 概して低精度なのが欠点



∵ゼロエネルギーモード
が現れてしまうから。
(低減積分要素で現れる
アワーグラスモードと同等)

$[^{\text{Node}} B]$

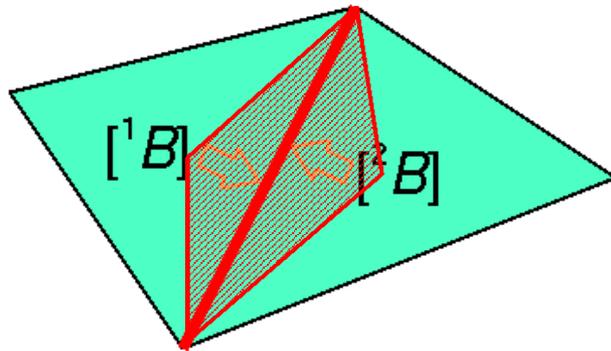
Node T

$\{f^{\text{int}}\}$

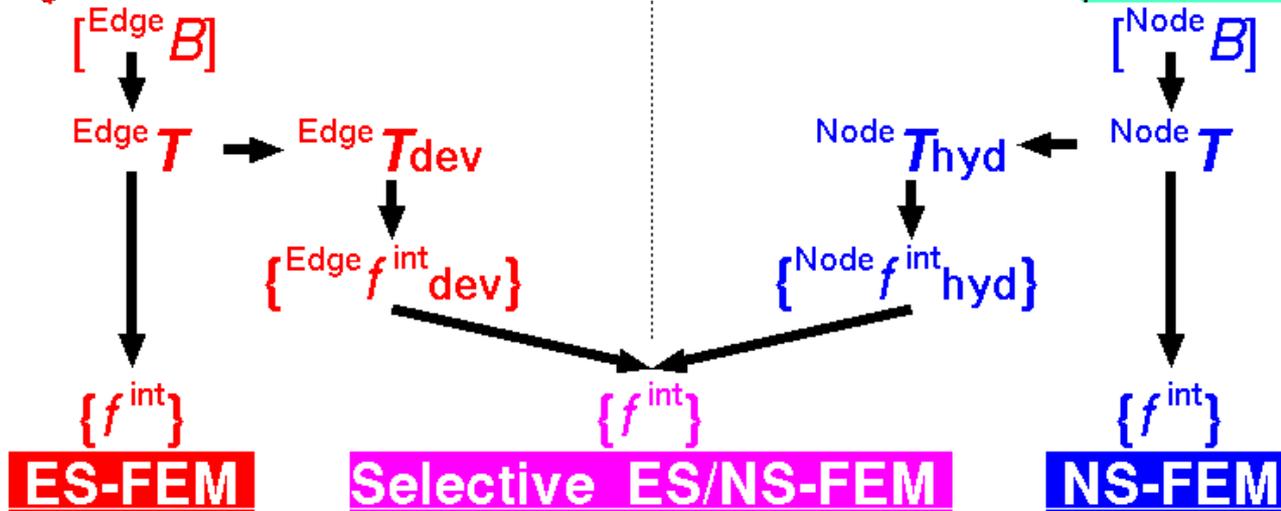
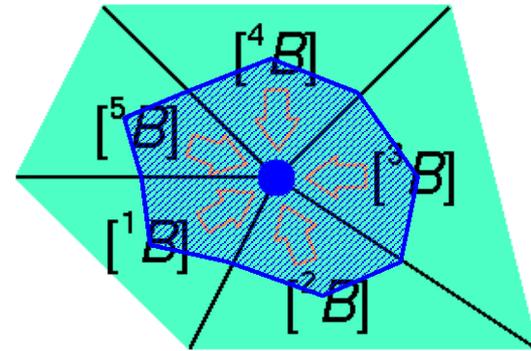
NS-FEM

独自改良版 Selective ES/NS-FEM

- 応力を "deviatoric (偏差) part" と "hydrostatic (静水圧) part" に分解
- $F, T, \{f^{int}\}$ 等をエッジとノードの両方でそれぞれ計算して合算.
高精度でロッキングを回避し, ほぼ任意の材料モデルに適用可能



例外:
圧力依存性
などDev/vol
カップリングが
ある材料



「エッジ」を
「フェイス」と
読み替えば
selective
FS/NS-FEM
for 3D

解析例と問題点の整理

検証解析例1

片持ち梁の曲げ解析概要

■ 10m x 1m x 1m の片持ち梁の先端に 20 kNの死荷重

■ Neo-Hookean **超弾性体**:

$$[T] = 2C_{10} \frac{\text{Dev}(\bar{B})}{J} + \frac{2}{D_1} (J - 1)[I].$$

■ C_{10} は 1 GPa で一定, D_1 を様々に変化.

■ **独自改良版 selective FS/NS-FEM** では 9560個の四面体要素と 2288個の節点を使用.

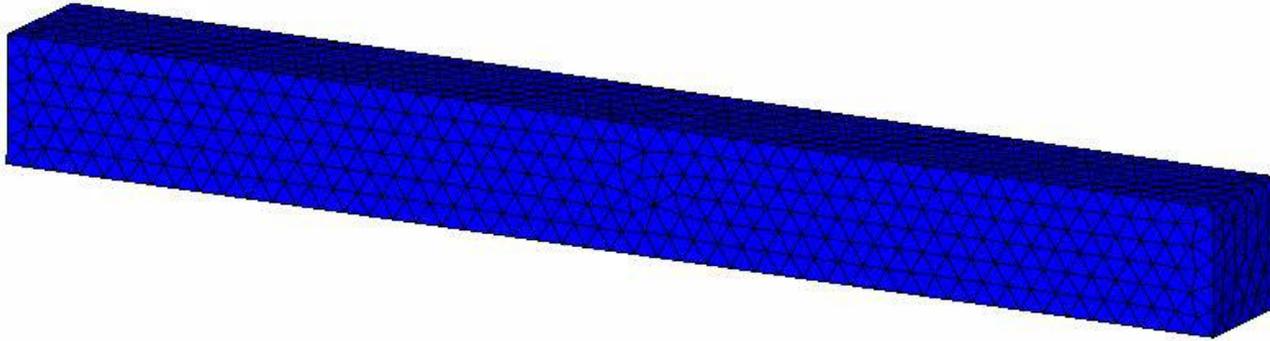
■ **参照解 ABAQUS/Standard** では 1250個の **C3D20H** (六面体2次ハイブリッド要素) と 6696個の節点を使用.

■ S-FEMそのものの検証の為, メッシュリゾーニングは実施しない.



検証解析例1

$D_1 = 2 \text{ PPa}^{-1}$ ($\nu_0 = 0.499999$)の時の解析結果



Mises Stress (Pa)

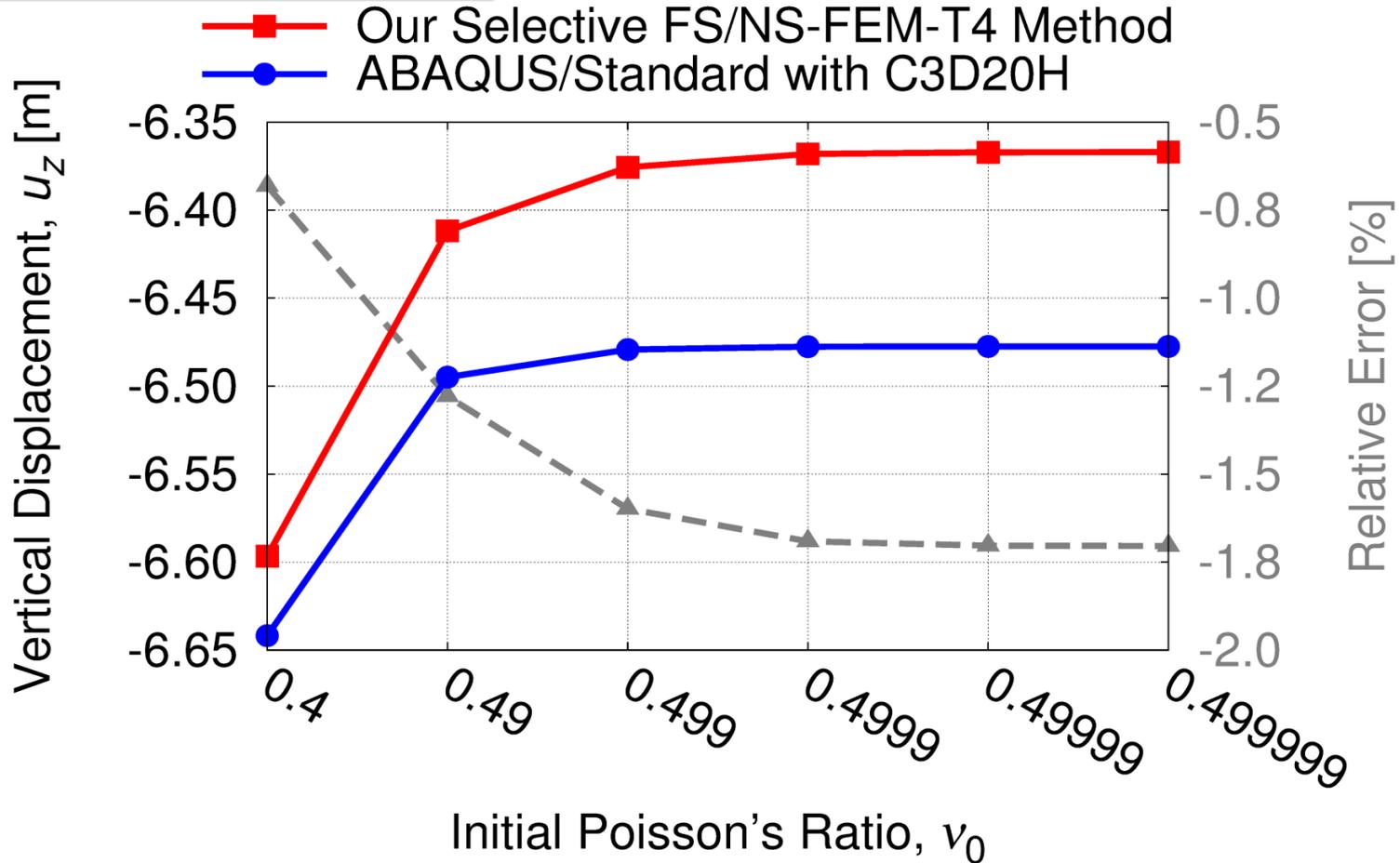


たわみ量は
およそ -6.5 m
となった。

なお、この問題を
定ひずみ四面体要素
で解くと、たわみ量は
たったの -0.1 m
となってしまふ。

検証解析例1

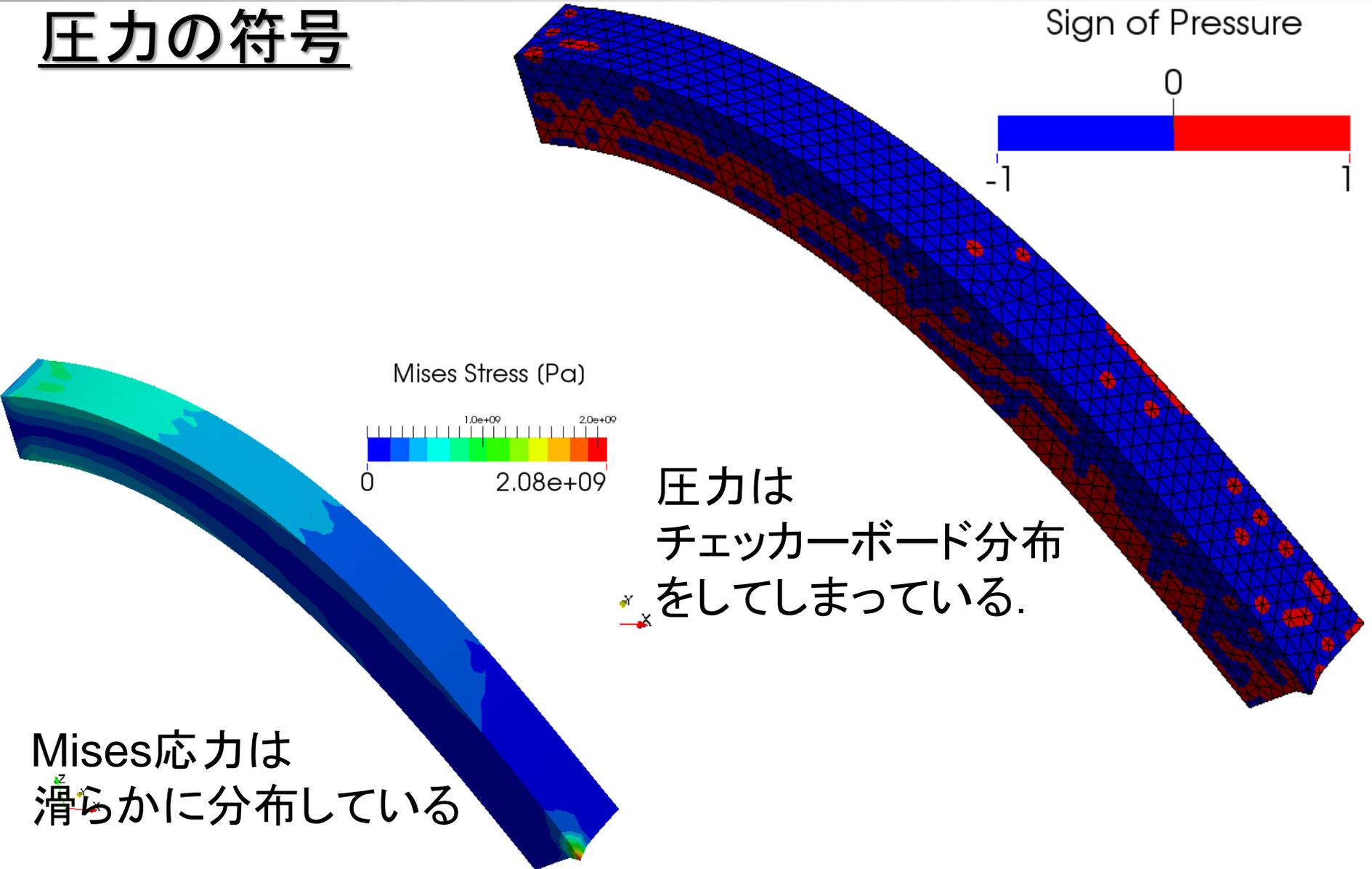
先端たわみ量の比較



提案手法は大たわみ問題において
ロッキングを起こさない！！

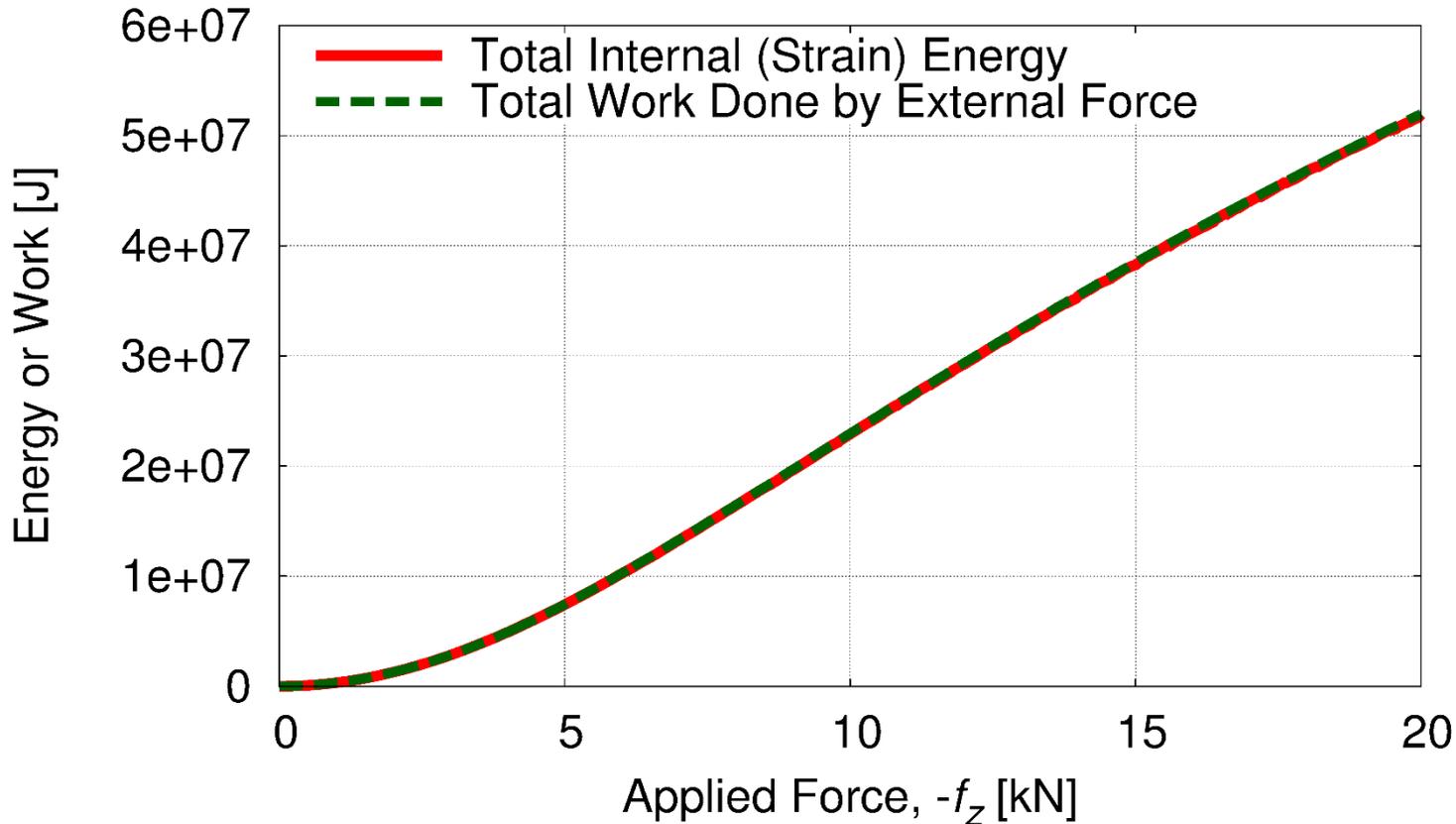
検証解析例1

圧力の符号



検証解析例1

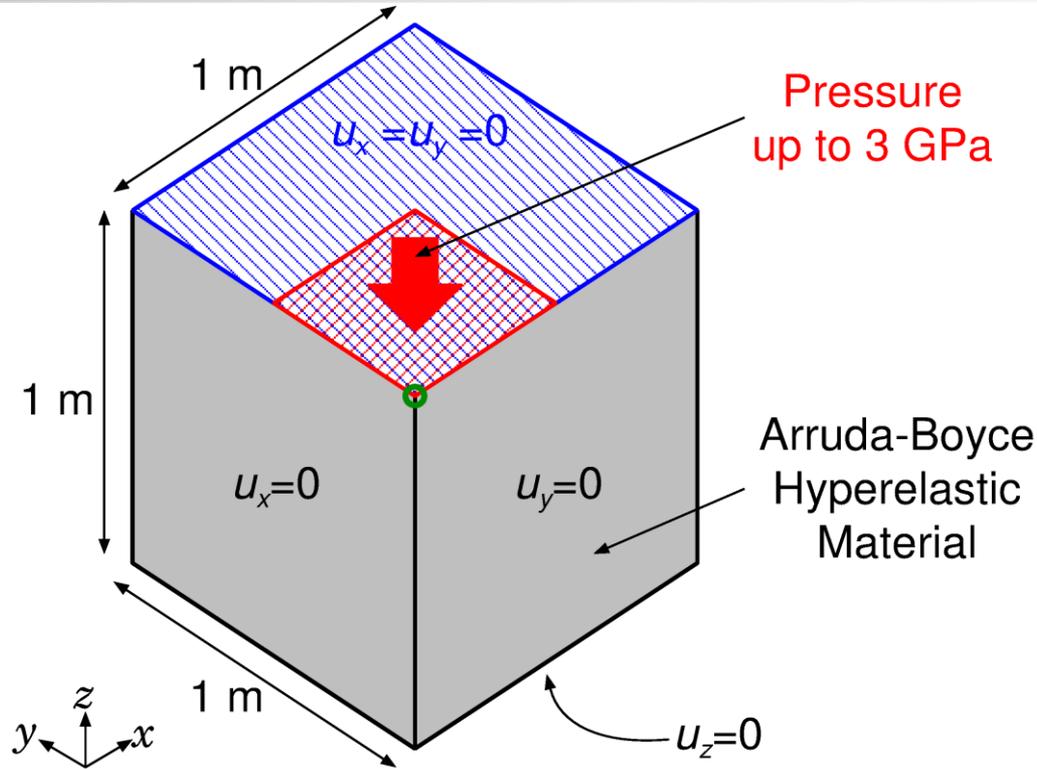
内部エネルギーと外力仕事



内部エネルギーと外力仕事は一致している。
⇒ 純粹に圧力振動のみが生じている。

検証解析例2

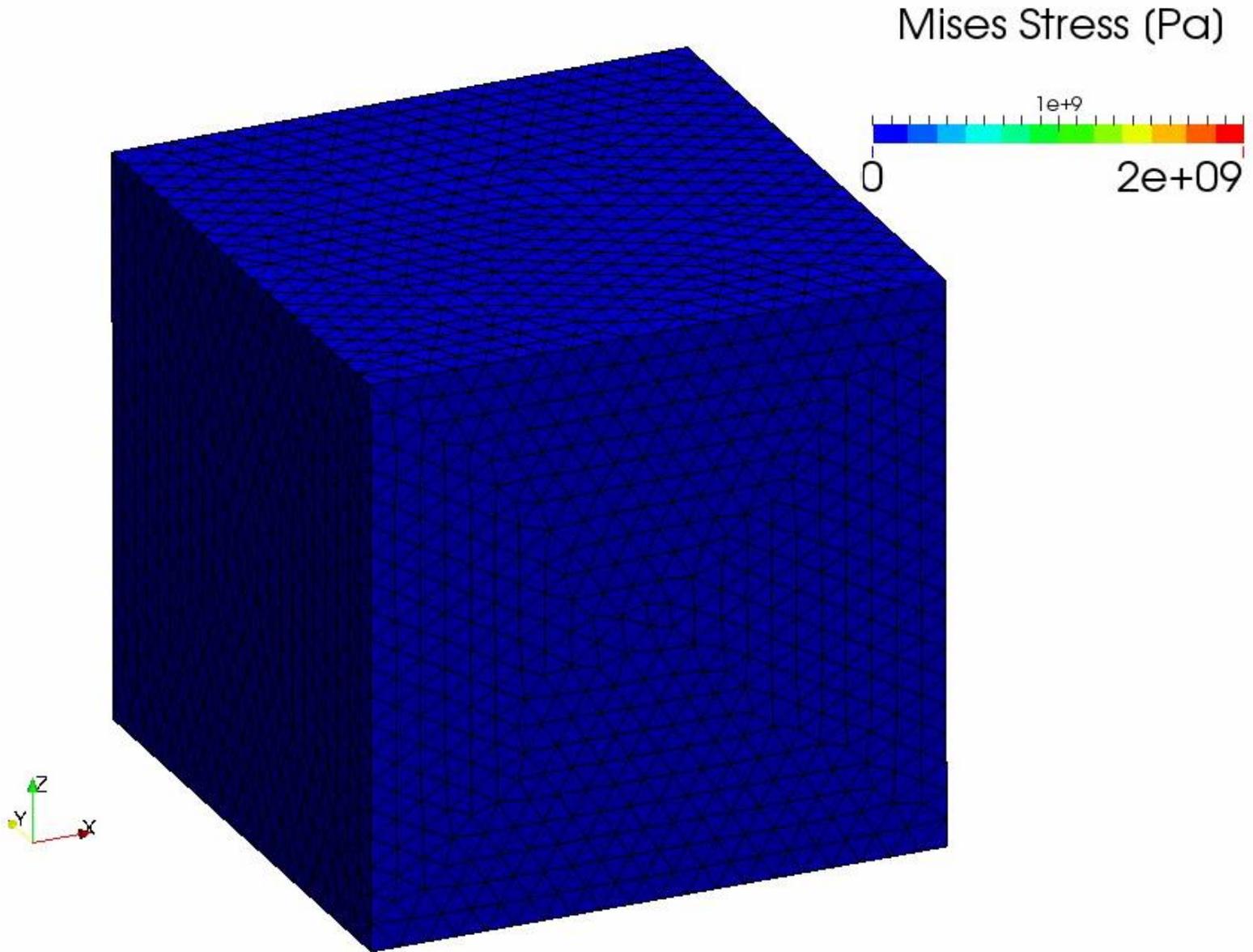
立方体の 押し込み解析 概要



- Arruda-Boyce超弾性体 ($\nu_{ini} = 0.4999$)
- 上面の $\frac{1}{4}$ に圧力荷重を負荷

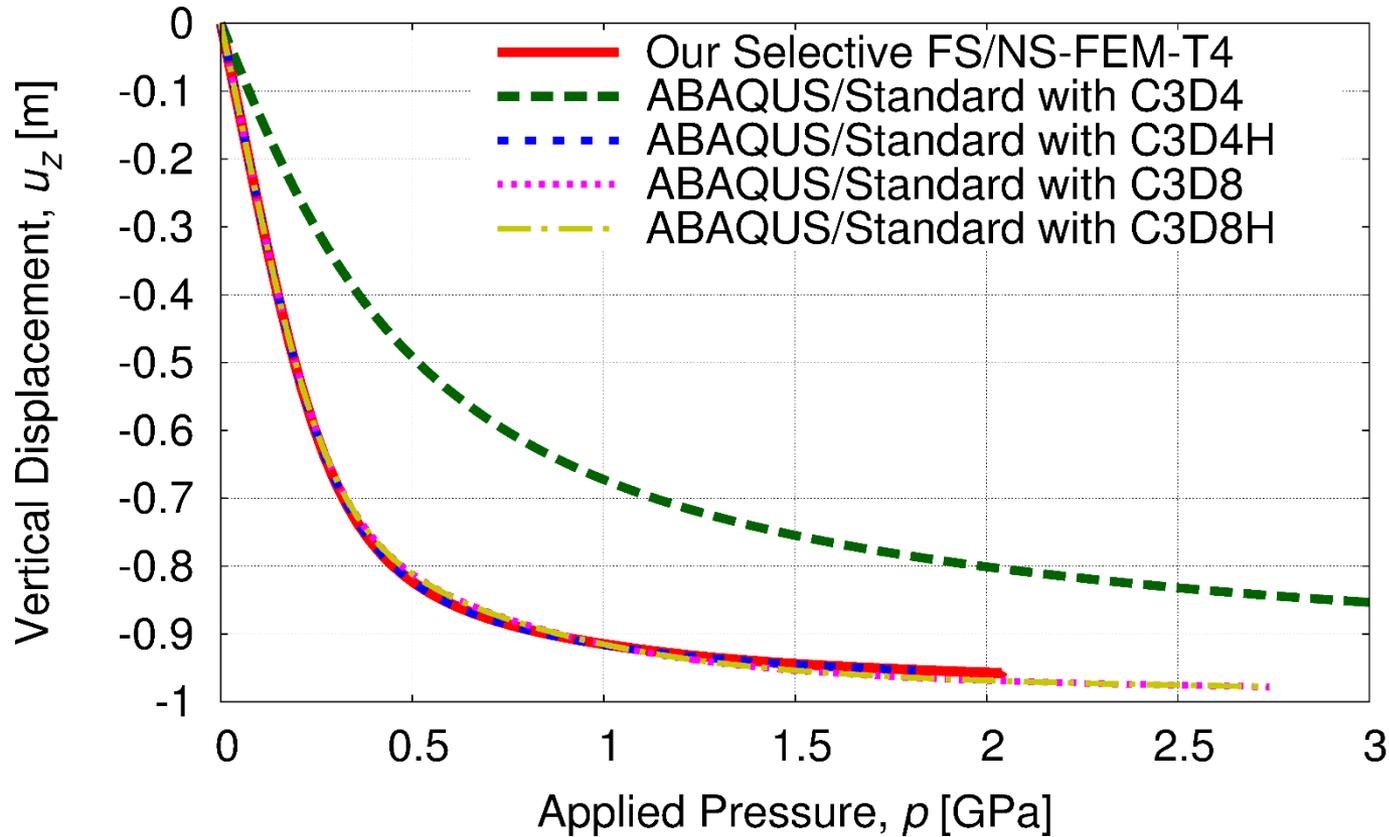
検証解析例2

提案
手法
での
解析
結果



検証解析例2

角点の垂直変位 vs. 負荷圧



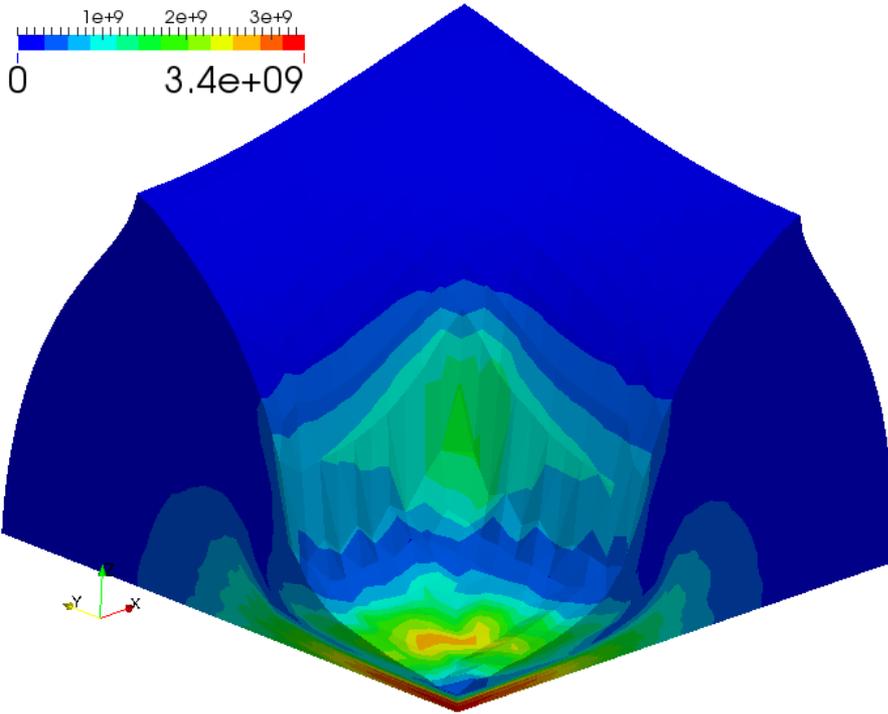
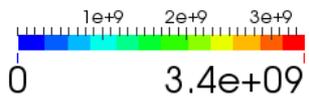
提案手法は
大ひずみ問
題でも
ロッキング
を起こさな
い！！

- 一定ひずみ要素 (C3D4)はすぐにロックしている.
- その他の要素および提案手法はロックしていない.
- 提案手法とC3D4Hはほとんど同じ結果を示している.

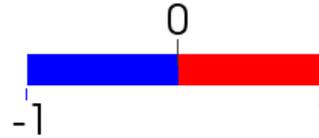


検証解析例2

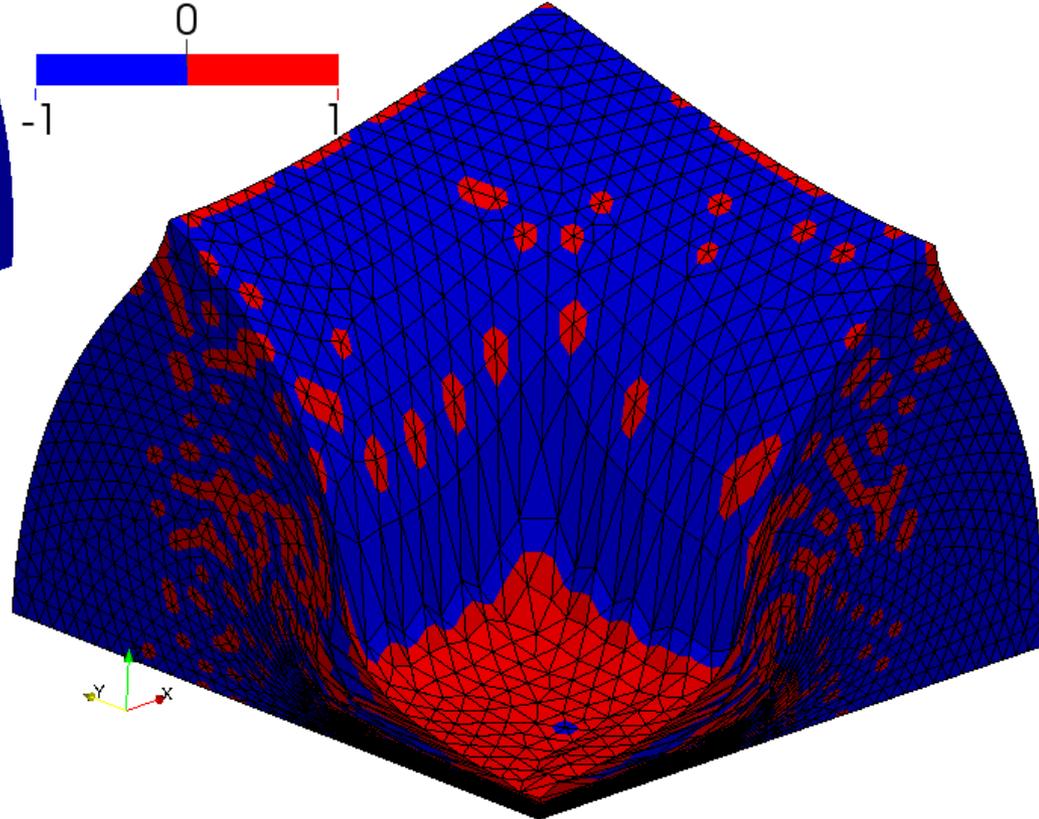
Mises Stress (Pa)



Sign of Pressure



チェッカーボード分布の
圧力振動が見られる。

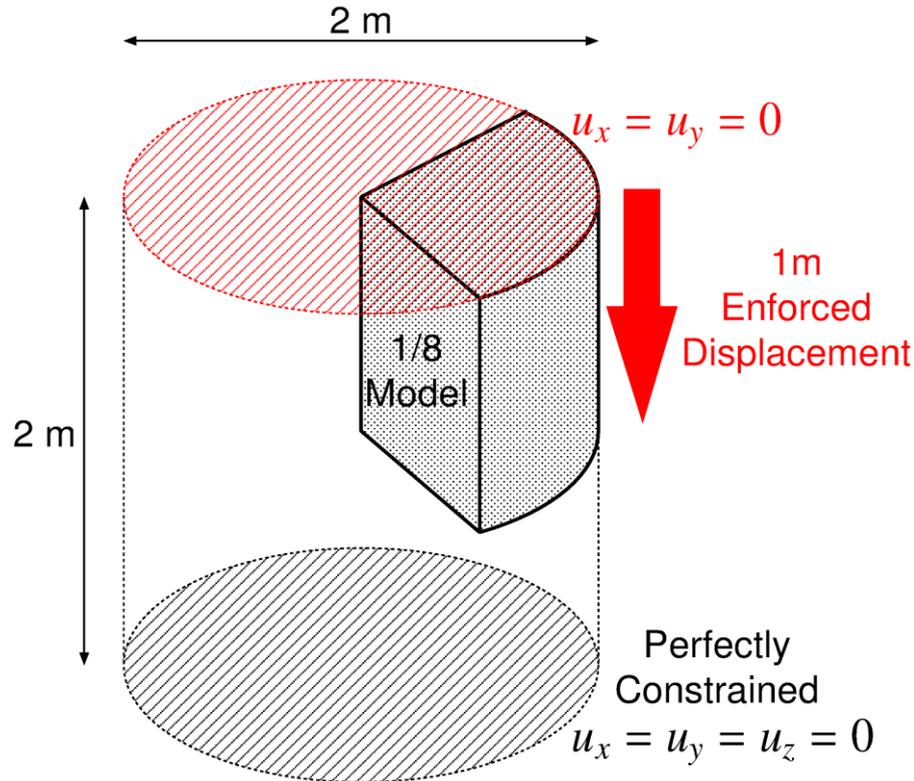


角の要素は平滑化されないため
多少ロッキングを起こしている。

検証解析例3

1/8円柱の

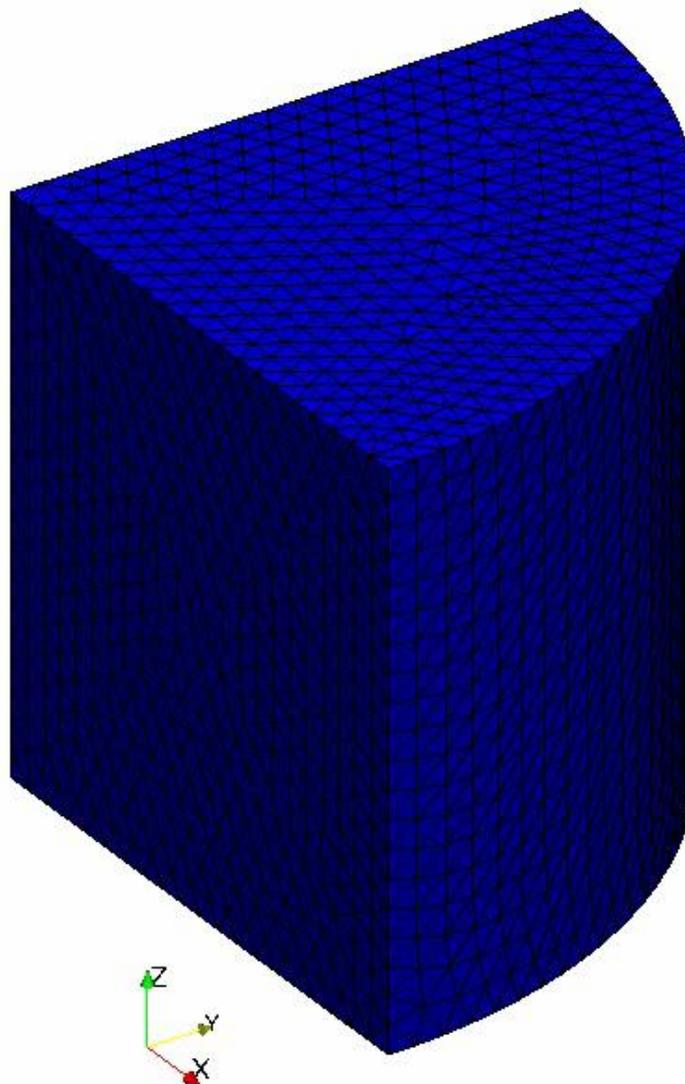
押し込め解析概要



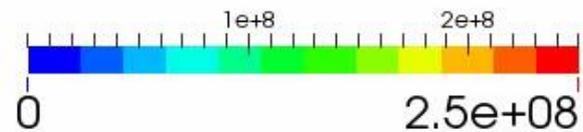
- 軸方向に50%圧縮.
- Neo Hookean超弾性体 $C_{10} = 40 \times 10^6 \text{ Pa}$, $D = 5 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ (i.e., $\nu_{ini} = 0.4999$).
- 完全に同一のメッシュ分割で, ABAQUS/StandardのC3D4Hと結果を比較.

検証解析例3

提案手法
での
解析結果



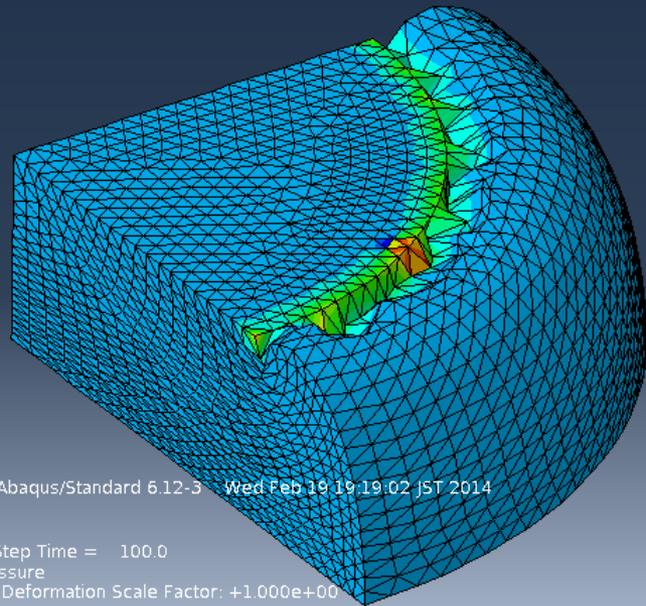
Mises Stress (Pa)



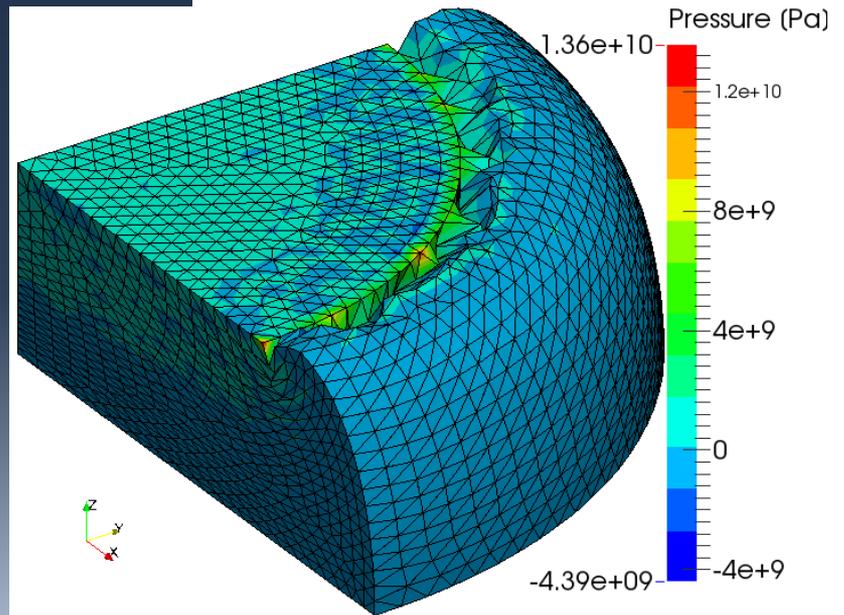
検証解析例3

ABAQUSのC3D4Hとの比較

C3D4H
of ABAQUS/Standard



Our Selective
FS/NS-FEM-T4



- 変形形状は互いに酷似している。
- 提案手法の圧力振動の振幅がC3D4Hの約2倍。

問題点の整理

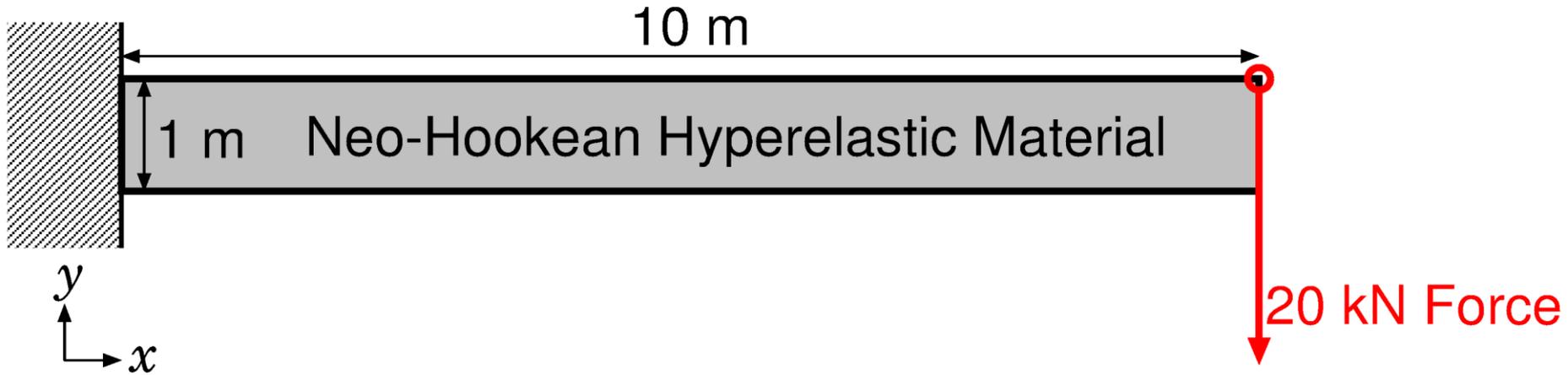
1. Selective法の一種であるが故、dev/volカップリングのある材料モデルを扱うことが出来ない。
(C3D4Hはdev/volカップリングも扱える。)
2. 微縮性材料の変形解析において変位やMises応力は高精度に求められるが、圧力振動が起こる為に圧力の精度が悪い。
(C3D4Hも圧力振動はあるが、振幅は半分程度。)
3. 角の節点を使用する要素が1つしかない場合、その節点にはひずみ平滑化がかからないため角部がロッキングしてしまう。
(C3D4Hも同様にロッキングする。)



問題解決への取り組み (検討中の手法の速報)



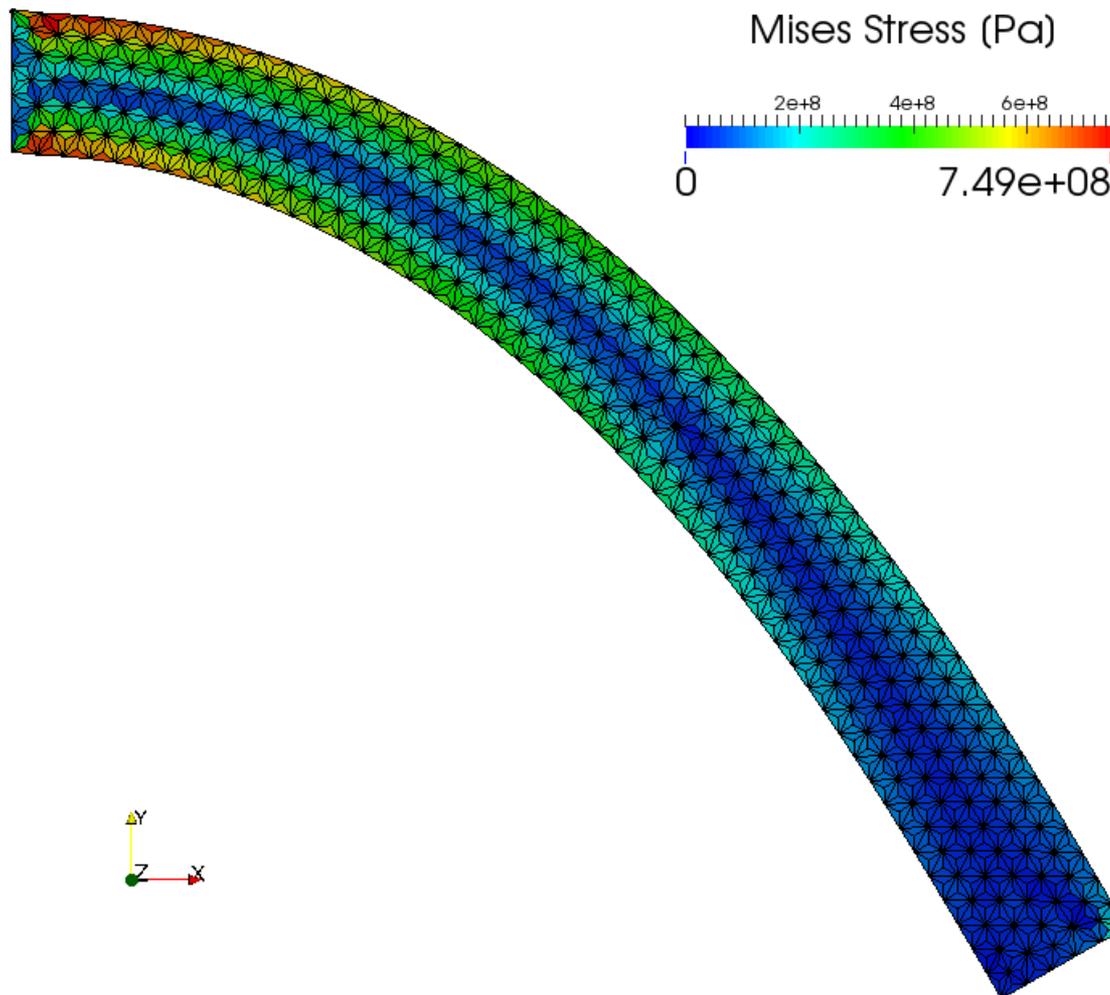
問題の観察



- 基本に戻って, 平面ひずみ片持ち梁の曲げ解析
- Neo-Hookean超弾性体
- 初期ポアソン比は0.4999

Selective S-FEMの解析結果

Mises応力分布

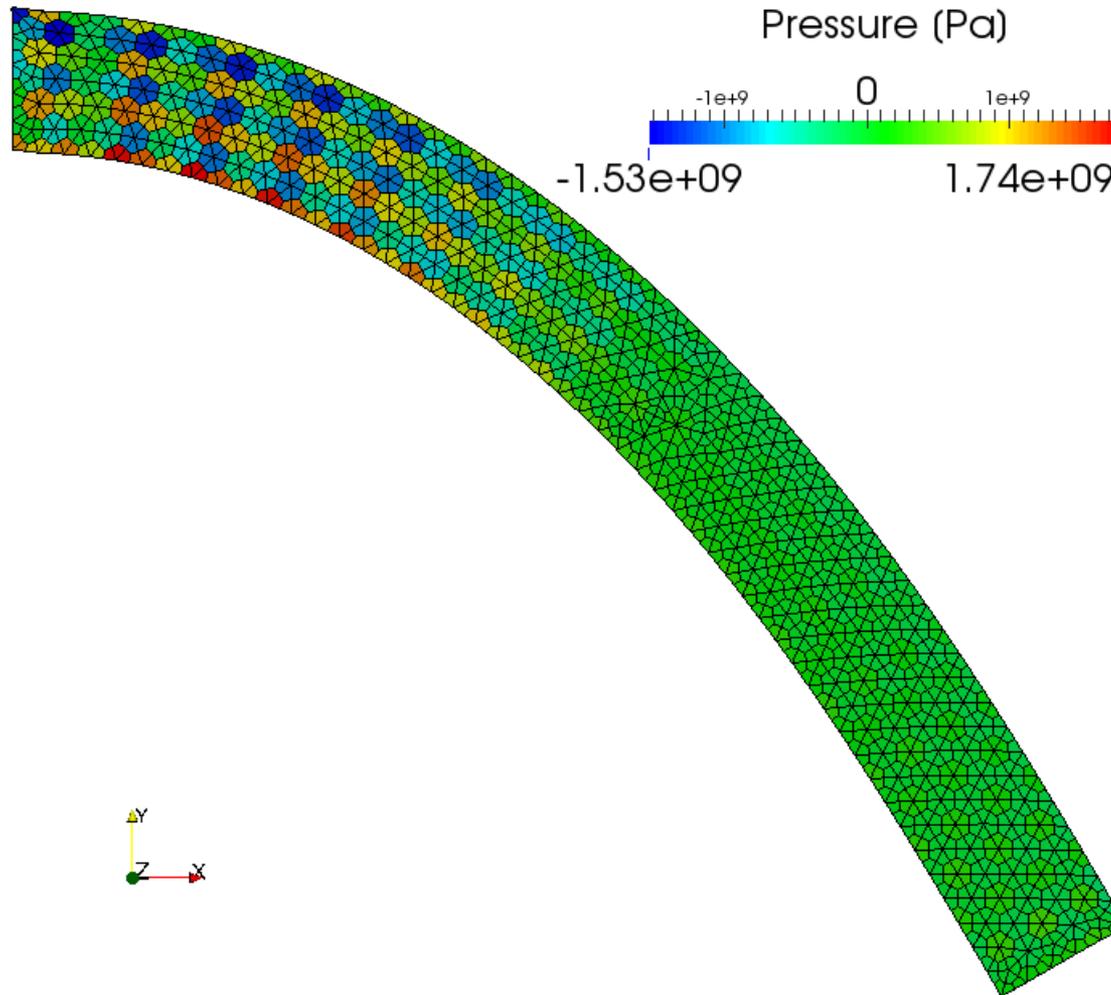


妥当な分布. ロッキングもなし.



Selective S-FEMの解析結果

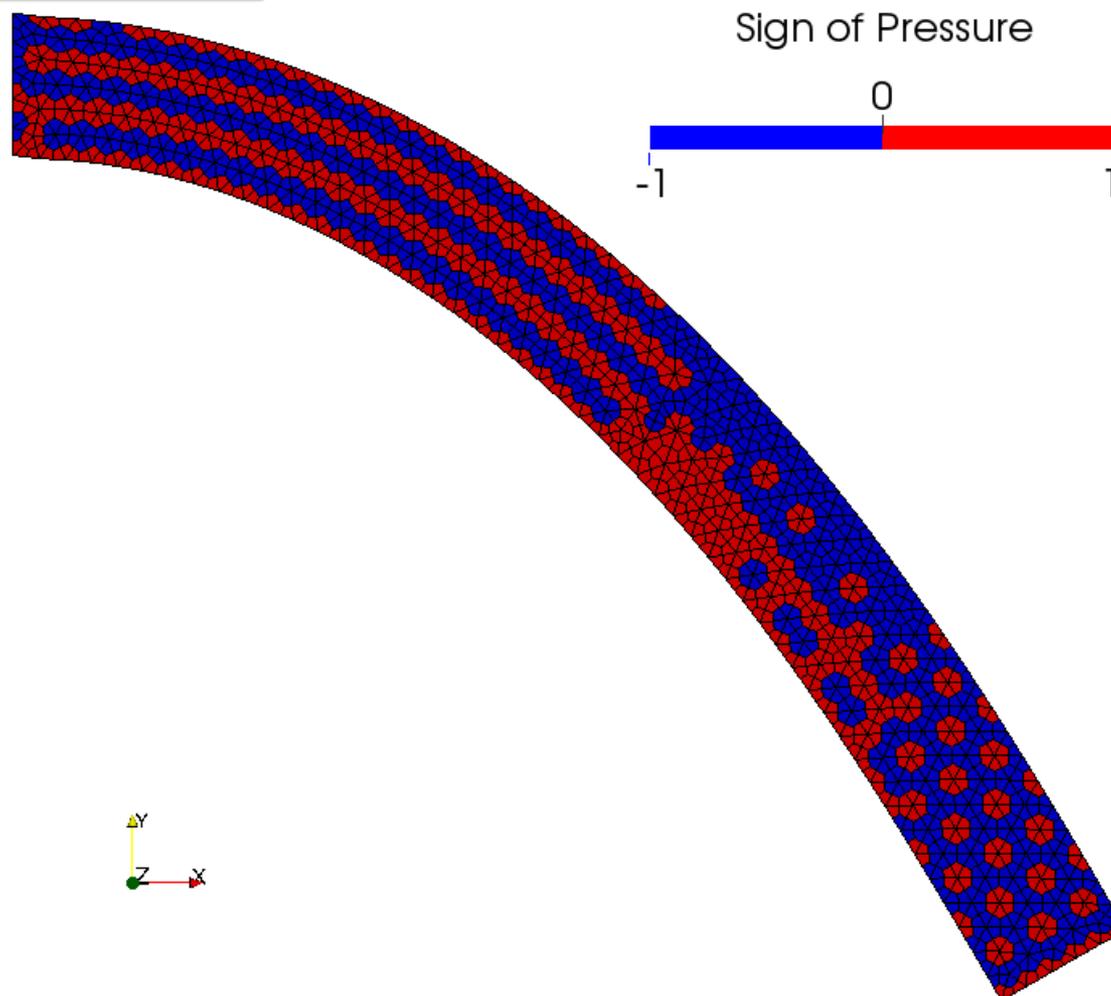
圧力分布



圧力振動を生じている

Selective S-FEMの解析結果

圧力の符号分布

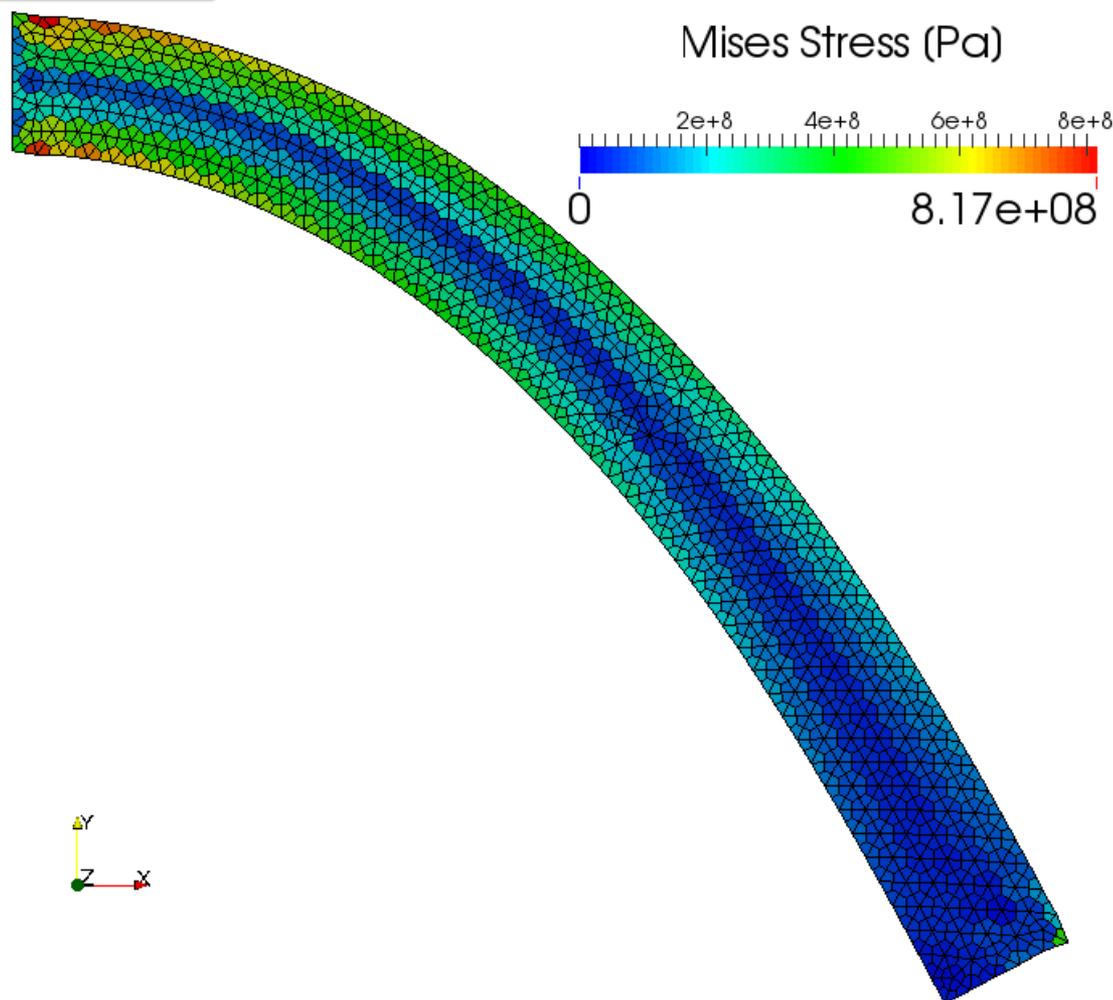


(特に先端付近で) 顕著なチェッカーボード現象あり



NS-FEMの解析結果

Mises応力分布

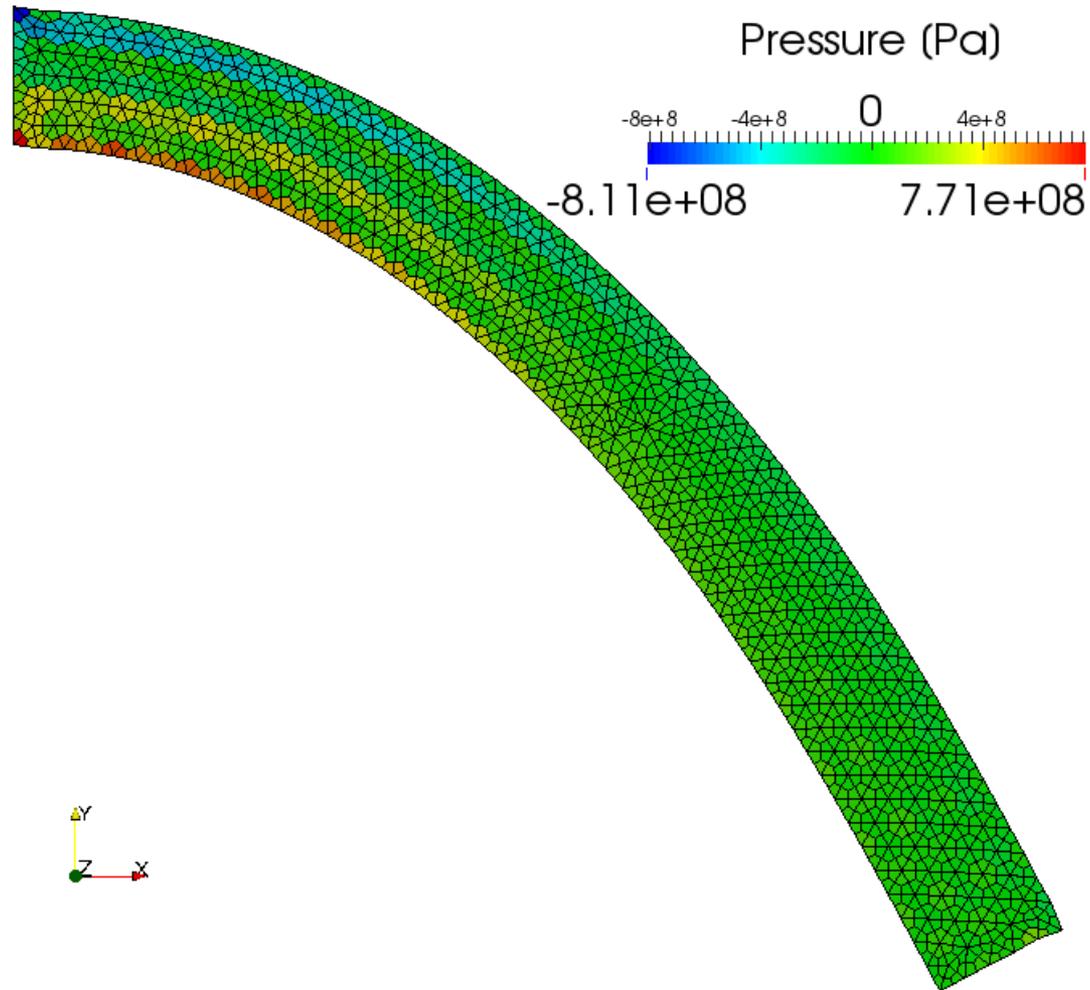


妥当な分布. ロッキングもなし.



NS-FEMの解析結果

圧力分布

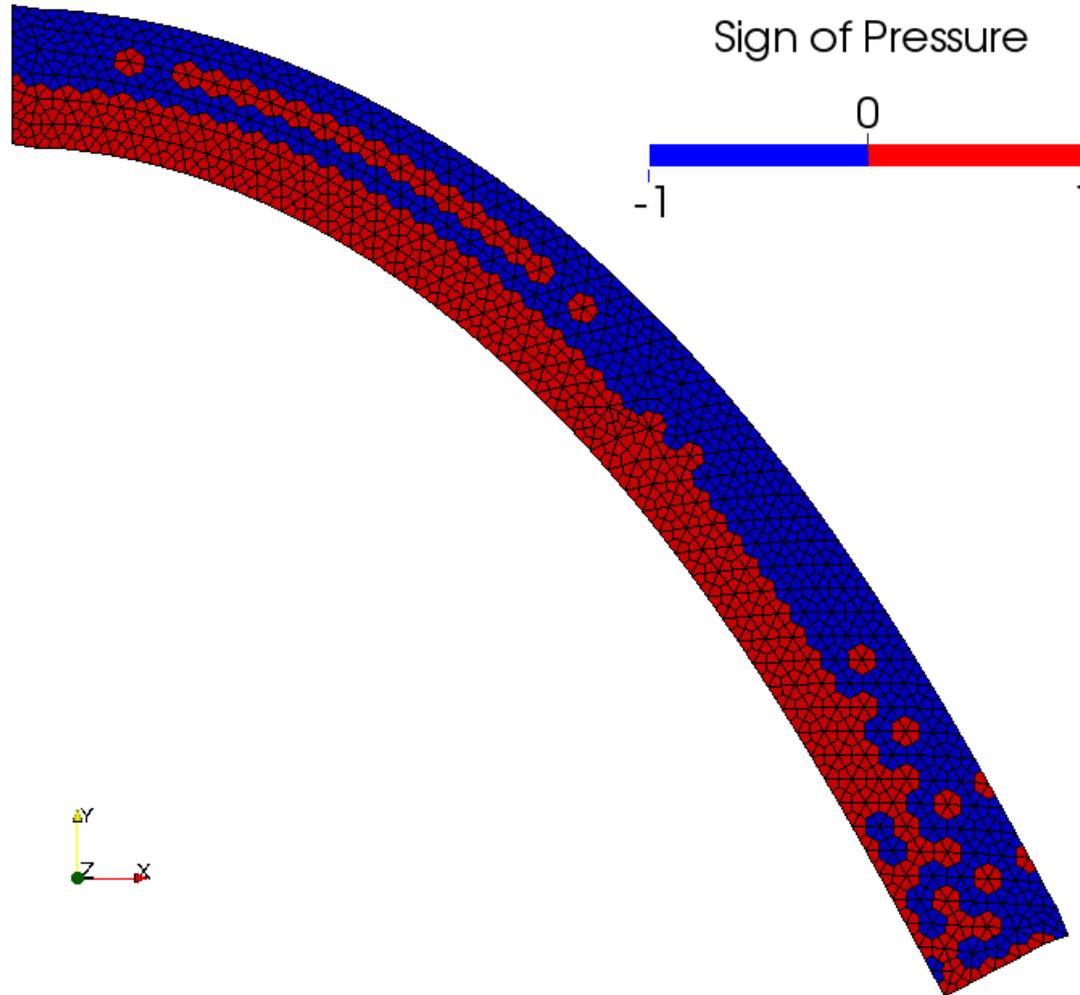


NS-FEMのみで既に圧力振動を生じている!!



NS-FEMの解析結果

圧力の符号分布



Selective S-FEMと似て非なるチェッカー一具合



改善方法の検討

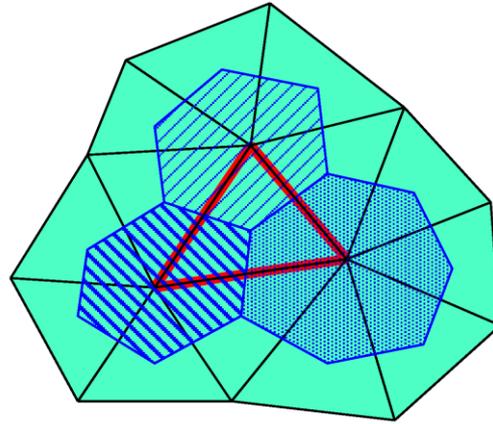
- 平滑化領域をもう少し広げる.
- 異なる2種類の $[B]$ を使い分ける. すなわち,
 - 変形勾配 F の計算に用いる $[B]$
 - 節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ の計算に用いる $[B]$を別のものにする.
(F-bar法に類するアプローチ)



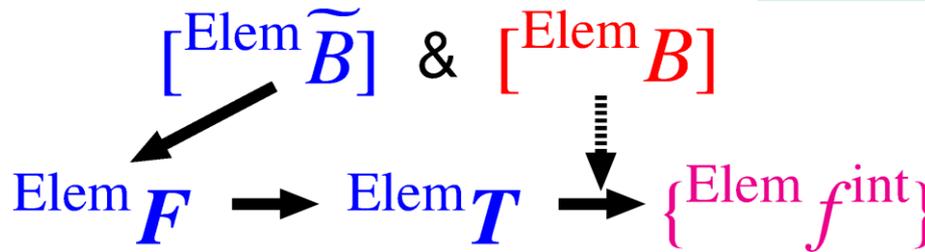
dev/volカップリング, 圧力振動, 角部のロッキング
の問題が解決できるか?

検討中の手法概要

ステンシルを要素(セル)としたある種のCS-FEM. いわばCS-NS-FEM.



通常のFEMの $[^{Elem}B]$ の他に, NS-FEMで作った $[^{node}B]$ を要素を構成する3節点で重ね合わせた $[^{Elem}\tilde{B}]$ も作る.



■ 変形勾配 F の計算には平滑化した $[^{Elem}\tilde{B}]$ を用いる.

$$\{^{Elem}\bar{L}\} = [^{Elem}\tilde{B}_N]\{\Delta u\}/\Delta t,$$

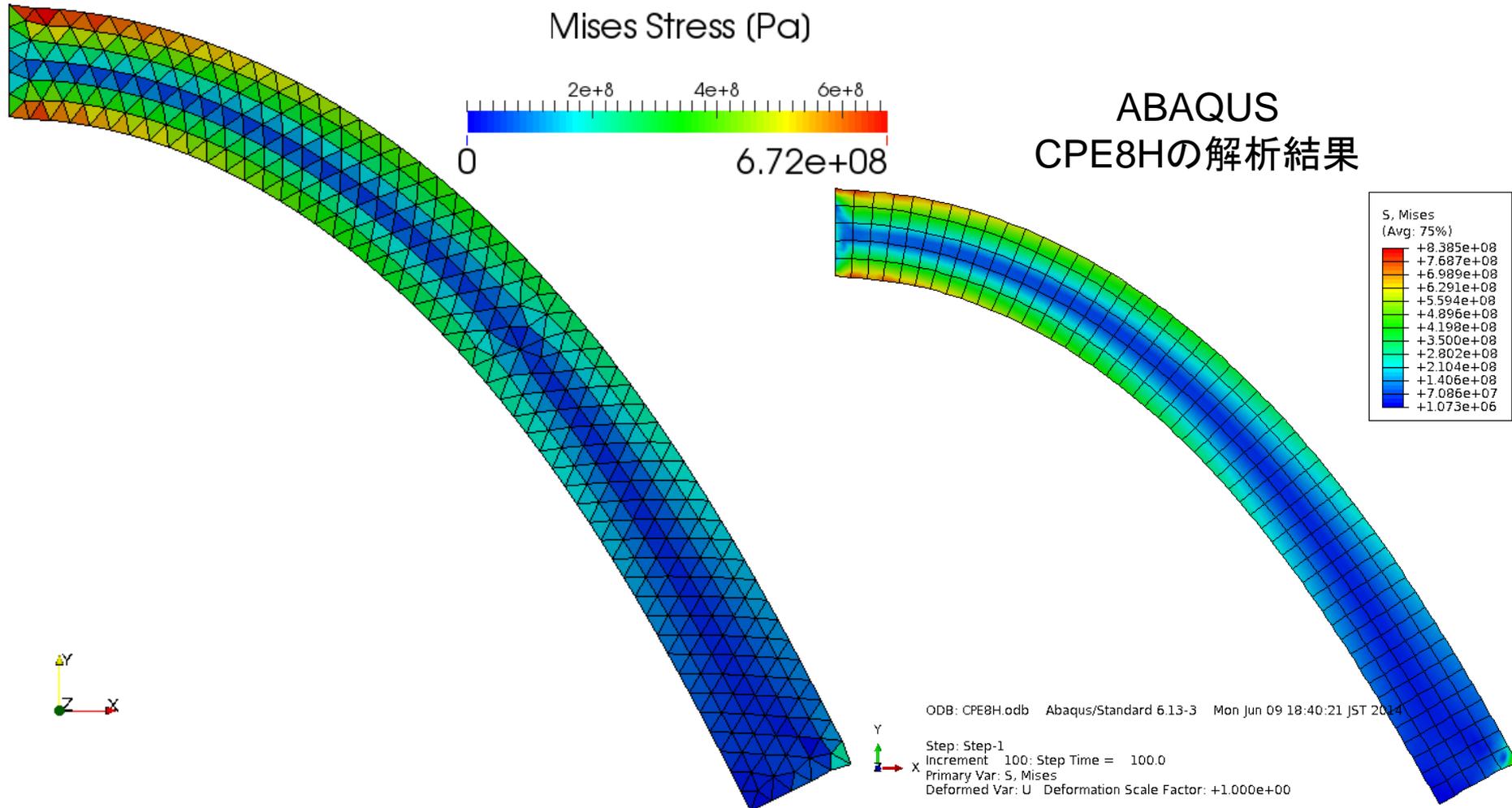
$$Elem F^+ = Elem F + (^{Elem}\bar{L}\Delta t) \cdot Elem F.$$

■ 節点内力 $\{f^{int}\}$ の計算は通常の $[^{Elem}B]$ を用いる.

$$\{^{Elem}f^{int+}\} = [^{Elem}B_L^+]^T \{^{Elem}T^+\} Elem V^+.$$

検討中の手法の解析結果

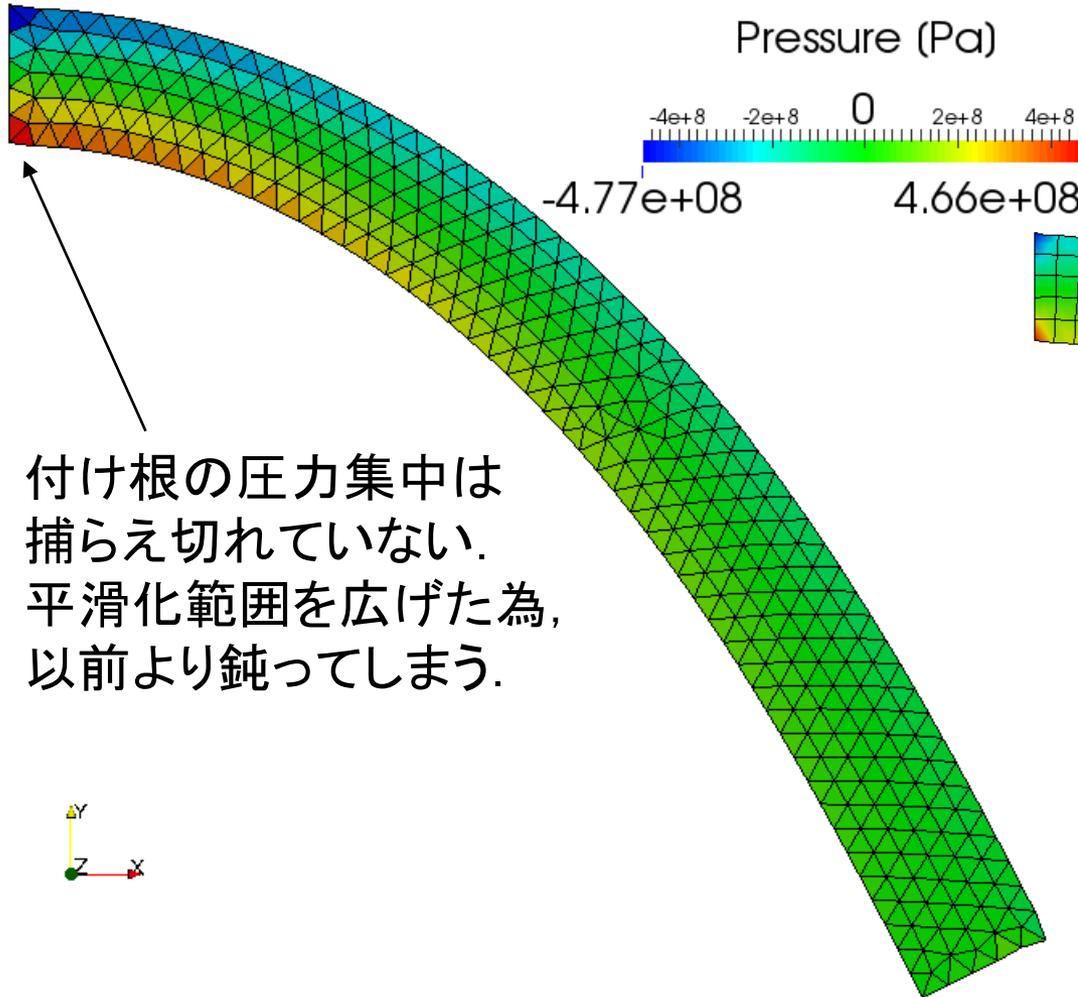
Mises応力



妥当な分布. ロッキングもなし.

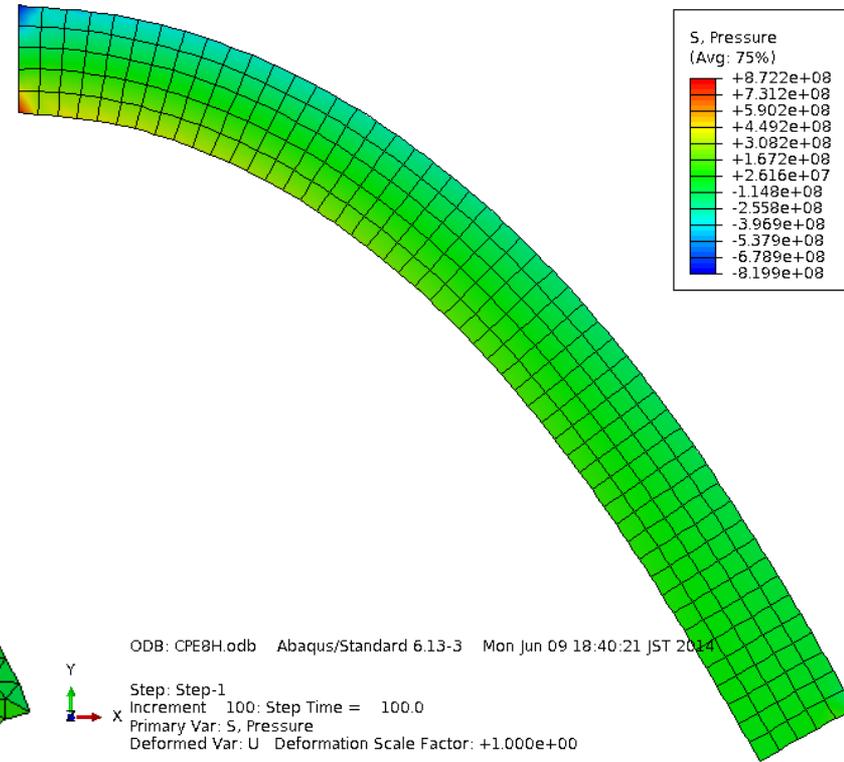
検討中の手法の解析結果

圧力分布



付け根の圧力集中は
捕らえ切れていない。
平滑化範囲を広げた為、
以前より鈍ってしまう。

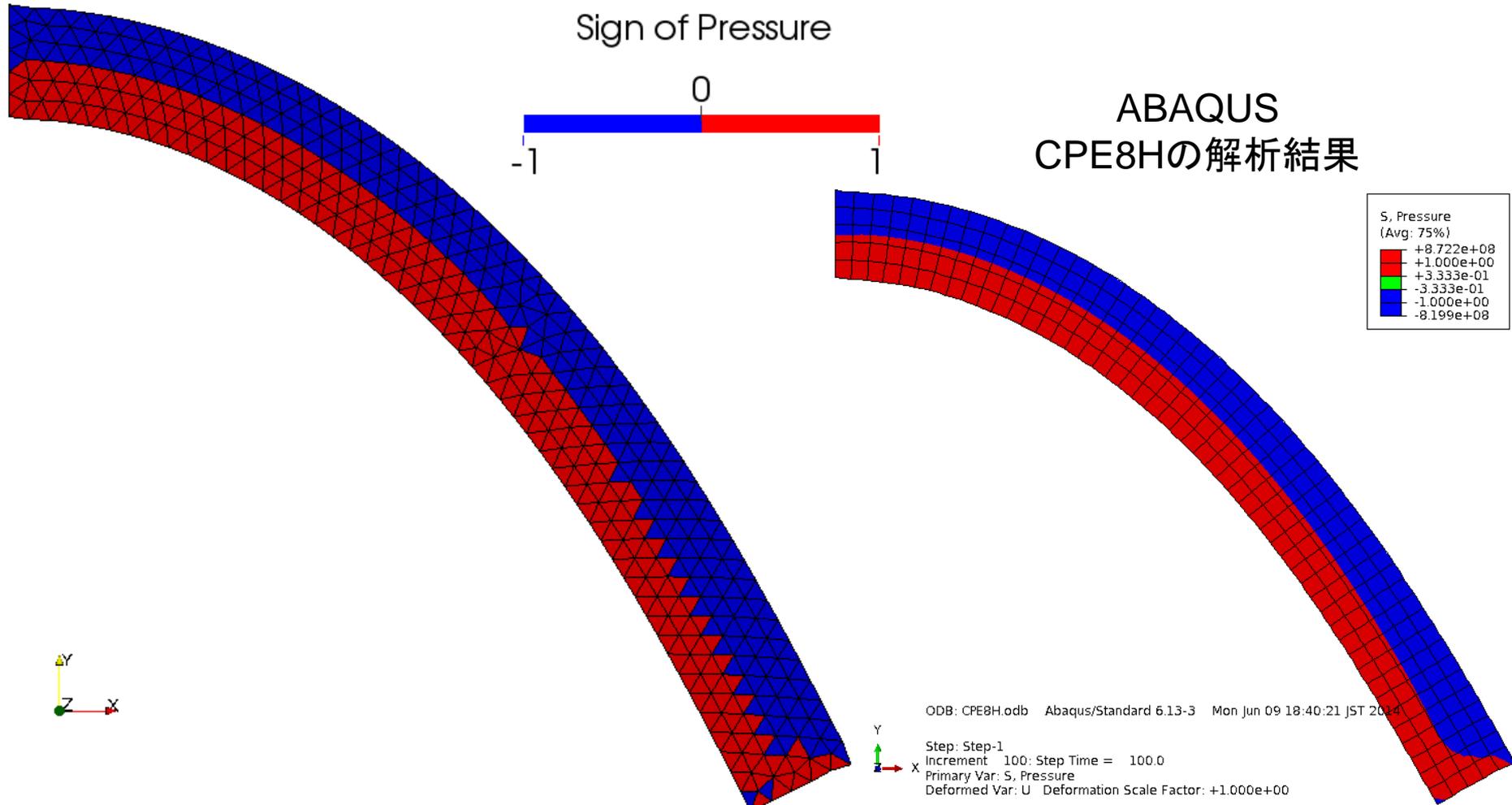
ABAQUS
CPE8Hの解析結果



圧力振動はほぼ抑制されている!!

検討中の手法の解析結果

圧力の符号分布



チェッカーボード現象は克服できている。

まとめ

まとめ & 今後の予定

■まとめ

- 四面体／三角形要素を用いたSelective S-FEMは Locking-FreeだがCheckerboard-Freeではないことを検証解析により確認した.
- 平滑化領域の工夫, およびF-bar法に類似したBマトリックスの選択等により, S-FEMでCheckerboard-Freeを達成できる可能性があることを示した.

■今後の予定

- 検討中の手法の発展.
- ハイブリッドS-FEMの検討.



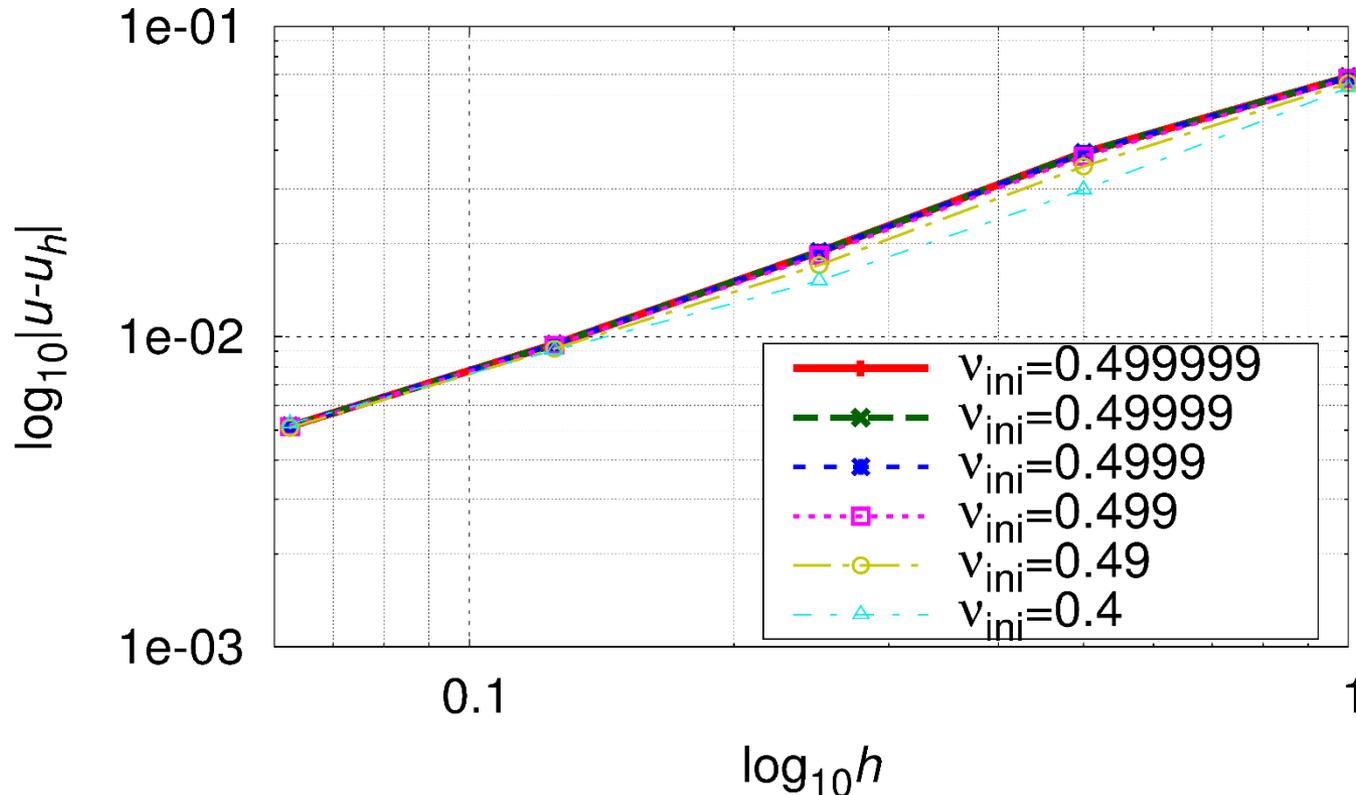
付録

特徴比較

	FS/NS-FEM-T4	ABAQUS/Standard C3D4H, C3D10H
未知数の数	増えない	増える (未定乗数個分)
剛性マトリックスの形	バンド幅が増えるだけ. ポアソン比0.4999程度であれば反復法で解ける. (良い前処理が見つかればもっといけるかも.)	未定乗数の式が増える. 性的縮約した方程式は、恐らく直接法でないとは解きづらい(はず).
微圧縮材料での圧力振動	大きめ	小さめ
扱える材料モデル	Dev/Volカップリングのない材料	(恐らく)Dev/Volカップリングのある材料もOK
複数材料界面の処理	特別な処理は不要	*TIEを用いる必要あり (未知数がさらに増える)
現状の完成度	まだ開発途上. 接触その他の機能も自ら開発が必要.	完成品. ABAQUSの膨大な機能が全て使える.

メッシュサイズに対する収束速度

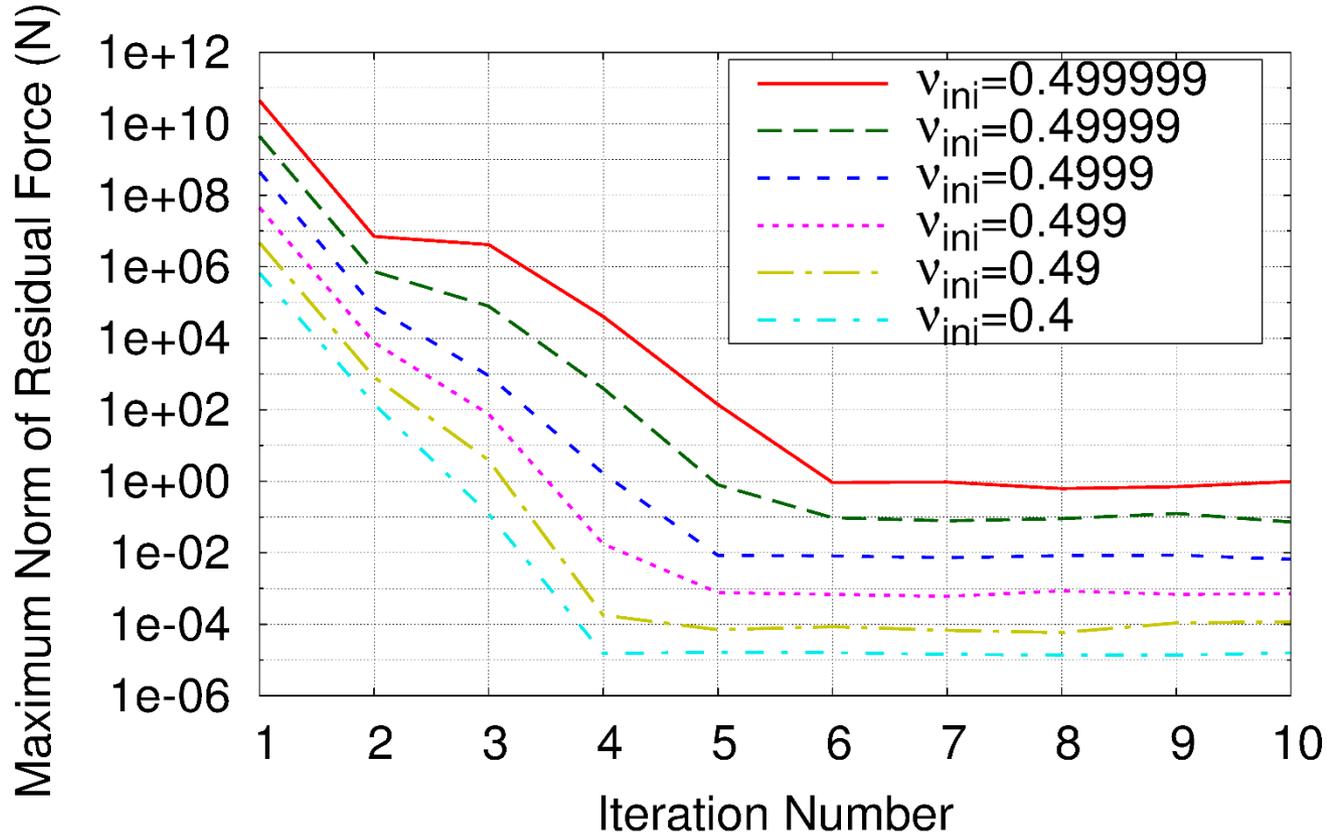
片持ち梁の曲げ解析 (Neo Hookean超弾性体) の 先端変位の収束挙動



- 標準的なFEM1次要素と同じ速度の線形収束.
- 非圧縮に近づいても収束速度は同じ.

Newton-Raphsonループの収束速度

片持ち梁の曲げ解析 (Neo Hookean超弾性体) の 最初の時間ステップにおける収束挙動



- 収束速度はポアソン比に多少依存している。
(桁落ちが原因か?)

