

# 平滑化有限要素法(S-FEM)に基づく ロッキングフリー四面体要素

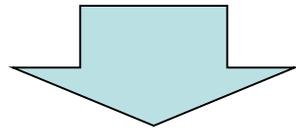
大西 有希, 天谷 賢治  
東京工業大学

# 研究背景

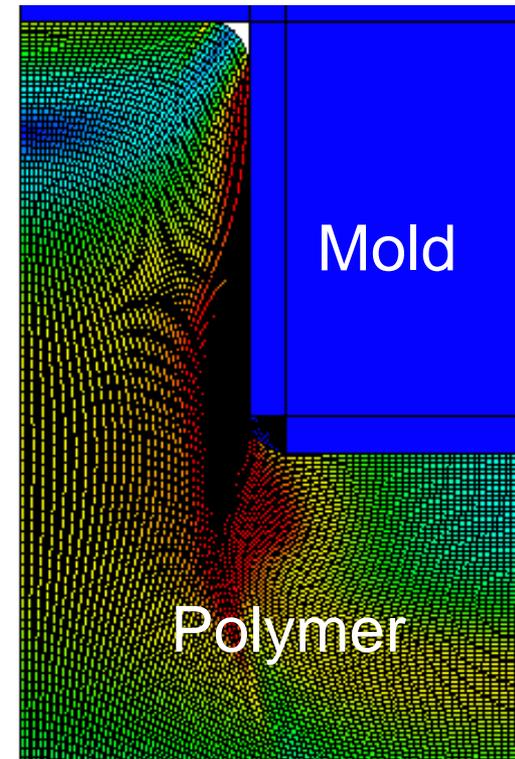
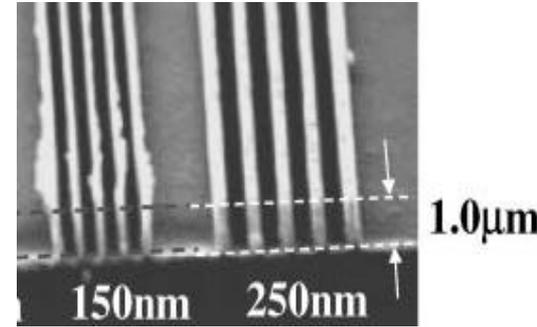
- 柔らかい材料の静的超大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。

(最終目標: タイヤゴムの大変形, 熱ナノインプリント樹脂成形など)

- メッシュ固定のFEMを使用するとメッシュがすぐに潰れてしまい, 解が得られない。



**メッシュリゾーニング** (メッシュを何度も切り直して計算を続行すること) が不可欠。



# 実現したい解析

Mises Stress (Pa)

1.18e+09

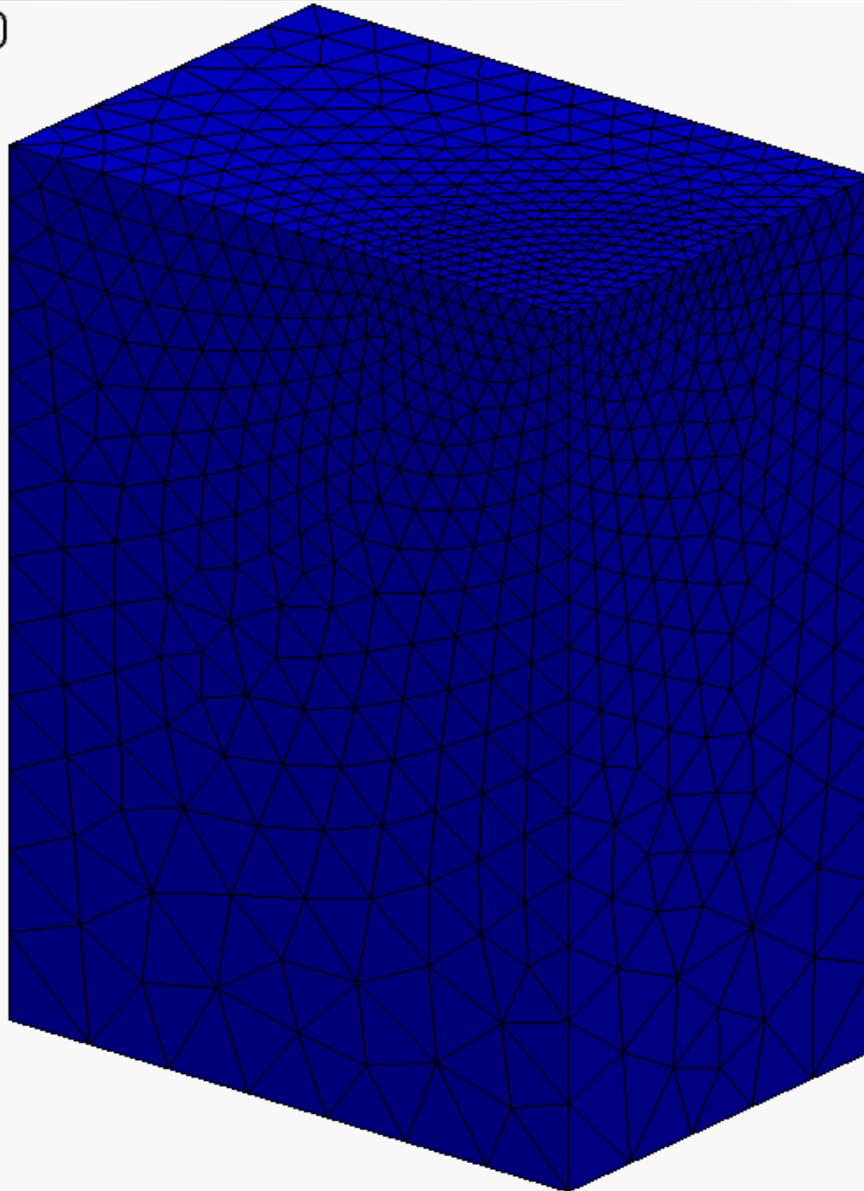
1.00e+09

7.50e+08

5.00e+08

2.50e+08

0.00e+00

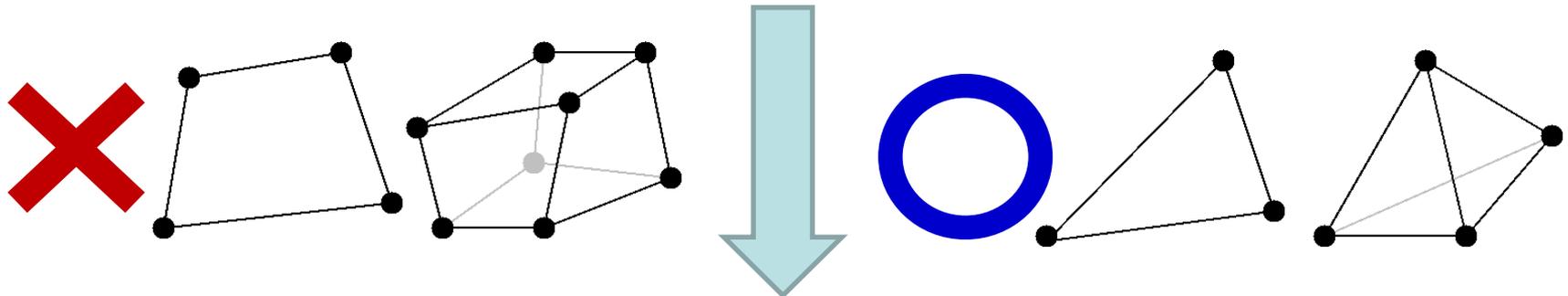


- 大変形
- 静的
- 陰解法
- メッシュ  
リゾーニング



# メッシュリゾーニングの問題点

任意の変形状態を持つ領域を良質な**四角形要素** (2D) および**六面体要素** (3D) でリメッシュすることが出来ない。



**三角形要素** および **四面体要素** を使用せざるを得ない。

しかし、標準的な(定ひずみ)三角形要素および四面体要素は容易にせん断ロッキングおよび体積ロッキングを引き起こす為、低精度な解しか得ることが出来ない...

# ロッキング回避のための従来法

- 高次要素:
  - ✗ 体積ロッキングを回避できない。  
中間節点があるため大変形で精度悪化の恐れがある。
- 拡張ひずみ仮定法(EAS):
  - ✗ 不安定。
- B-bar法, F-bar法, 選択的次數低減積分法:
  - ✗ 四面体要素や三角形要素にはそのまま適用できない。
- F-barパッチ法:
  - ✗ 良いパッチを作ることが難しい。
- u/p混合(ハイブリッド)法:
  - ✗ 今のところ完全に満足できる定式化が提案されていない。  
ただし, ほぼ許容出来るものは提案されている。  
(例: ABAQUS/Standardの「C3D4H」および「C3D10I」)
- 平滑化有限要素法(Smoothed FEM: S-FEM):
  - ? 可能性はまだ未知数。 試す価値アリ。



# 研究目的

- 平滑化有限要素法(S-FEM)に基づくロッキングフリーな四面体要素を開発する.
- さらに, 開発したS-FEMに適合する大変形メッシュリゾーニング法も提案する.

## 発表目次

- 独自改良版S-FEMの定式化の解説  
およびメッシュリゾーニング無しの解析例紹介
- S-FEMに適合するメッシュリゾーニング法の解説  
およびメッシュリゾーニング有りの解析例紹介
- まとめ



独自改良版S-FEMの定式化の解説  
および  
メッシュリゾーニング無しの解析例紹介



# Smoothed Finite Element Method (S-FEM)とは？

- ひずみ平滑化手法(strain smoothing)の一種.
- S-FEMには幾つかのタイプがある.
  - Edge-based (**ES-FEM**) for 2D
  - Face-based (**FS-FEM**) for 3D
  - Node-based (**NS-FEM**) for both 2D and 3D
  - Selective edge/node-based (**ES/NS-FEM**) for 2D
  - Selective face/node-based (**FS/NS-FEM**) for 3D
- Selective S-FEMは三角形要素および四面体要素でもせん断・体積ロッキングを避けることが出来るため、現行の最善手法と考えられている。

簡単のため、三角形要素を用いた2D解析で使用する

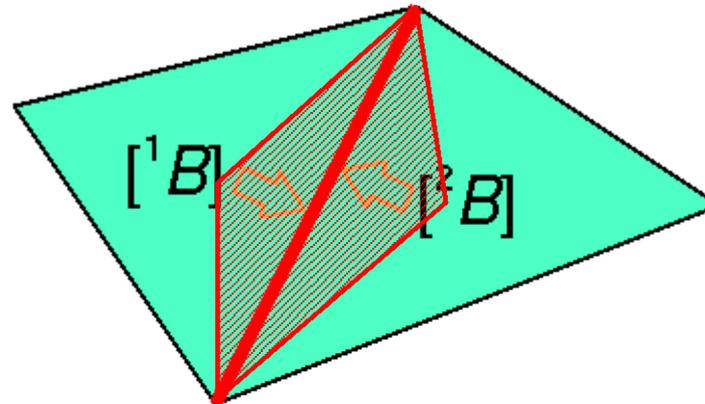
**ES-FEM**, **NS-FEM**, **selective ES/NS-FEM**, および  
**独自改良版selective ES/NS-FEM**について順に解説します。



# Edge-based S-FEM (ES-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するエッジに面積比で分配し,  $[^{\text{Edge}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$  等をエッジで計算.

概して高精度だが, 体積ロッキングを起こすのが欠点



$[^{\text{Edge}} B]$

Edge  $T$

$\{f^{\text{int}}\}$

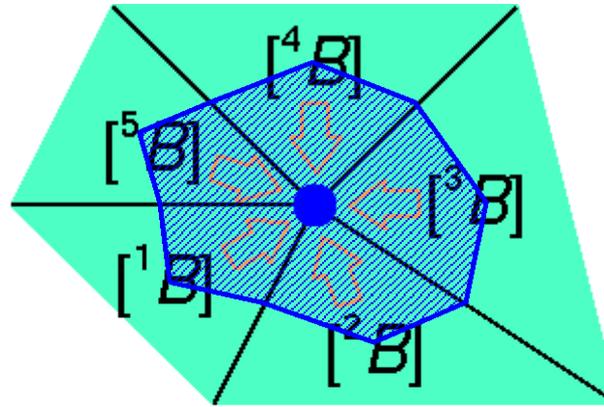
**ES-FEM**

「エッジ」を「フェイス」  
と読み替えば  
FS-FEM for 3D

# Node-based S-FEM (NS-FEM)

- スタンダードなFEMと同様に要素[B]を計算,
- 要素[B]を接するノードに面積比で分配し,  $[^{\text{Node}} B]$ を作成,
- $F, T, \{f^{\text{int}}\}$  等をノードで計算.

せん断・体積ロッキングを起こさないが, 概して低精度なのが欠点



∵ゼロエネルギーモード  
が現れてしまうから.  
(低減積分要素で現れる  
アワーグラスモードと同等)

$[^{\text{Node}} B]$

Node  $T$

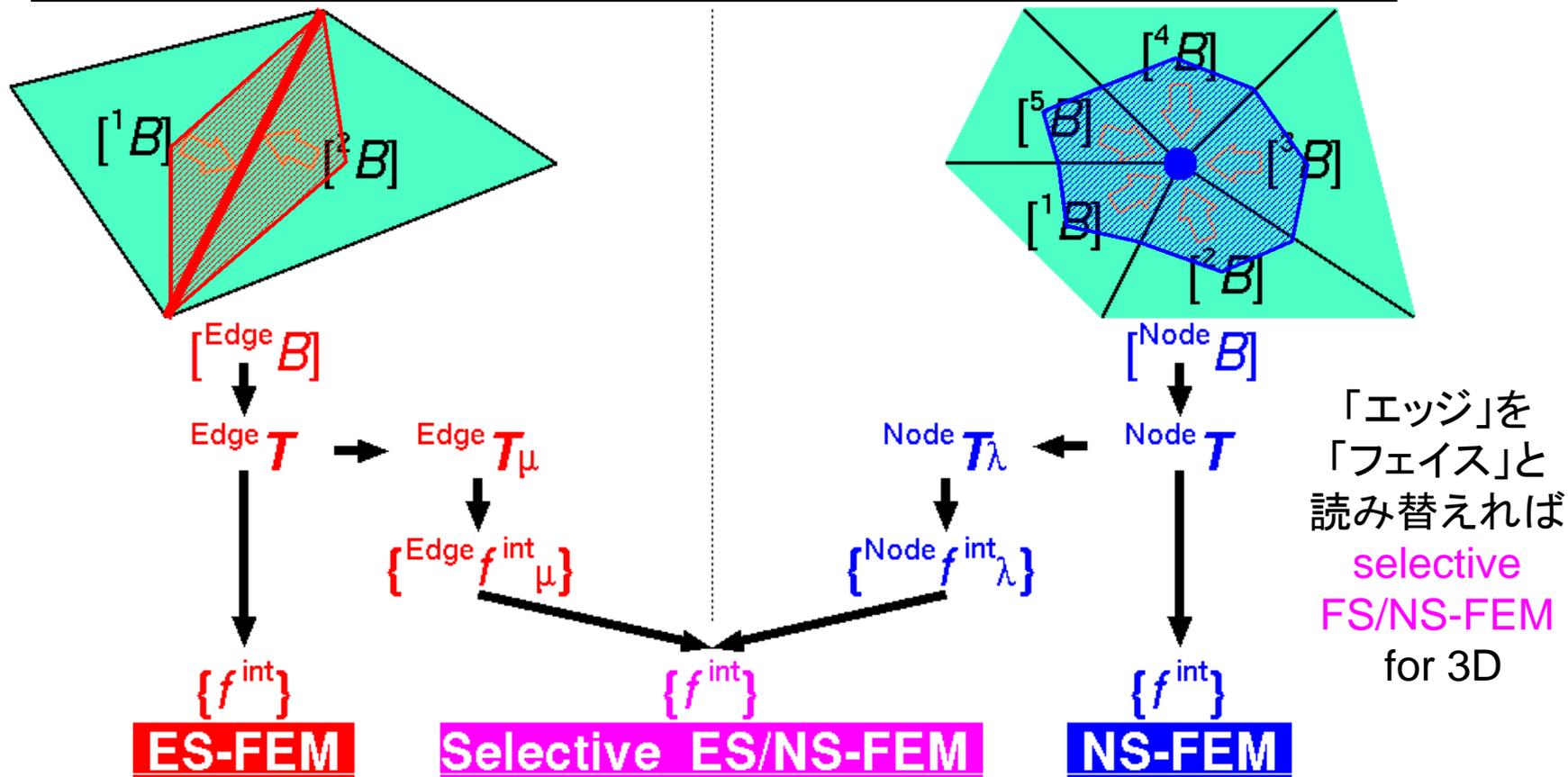
$\{f^{\text{int}}\}$

**NS-FEM**

# オリジナル版 Selective ES/NS-FEM

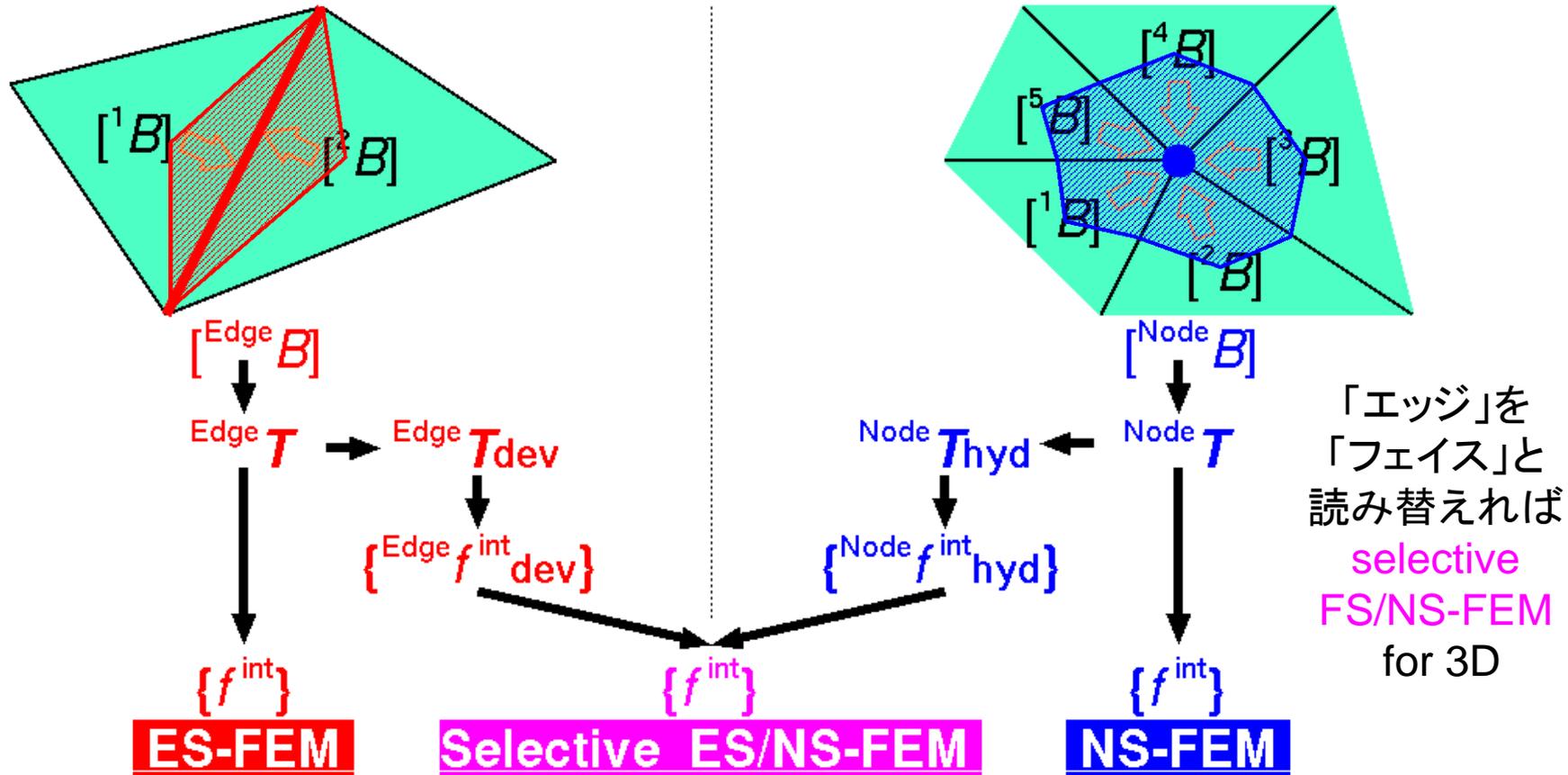
- Lamé定数  $\mu$  と  $\lambda$  に従い, 応力を " $\mu$  part" と " $\lambda$  part" に分解,
- $F, T, \{f^{int}\}$  等をエッジとノードの両方でそれぞれ計算して合算.

高精度でせん断・体積ロッキングも回避できるが,  
Lamé定数で陽に表される弾性材料モデルしか扱えない



# 独自改良版 Selective ES/NS-FEM

- 応力を "deviatoric (偏差) part" と "hydrostatic (静水圧) part" に分解
- $F, T, \{f^{int}\}$  等をエッジとノードの両方でそれぞれ計算して合算.  
高精度でロッキングを回避し, 任意の材料モデルに適用可能



# 検証解析例1

## 片持ち梁の曲げ解析概要

■ 10m x 1m x 1m の片持ち梁の先端に 20 kNの死荷重

■ Neo-Hookean **超弾性体**:

$$[T] = 2C_{10} \frac{\text{Dev}(\bar{B})}{J} + \frac{2}{D_1} (J - 1)[I].$$

■  $C_{10}$  は 1 GPa で一定,  $D_1$  を様々に変化.

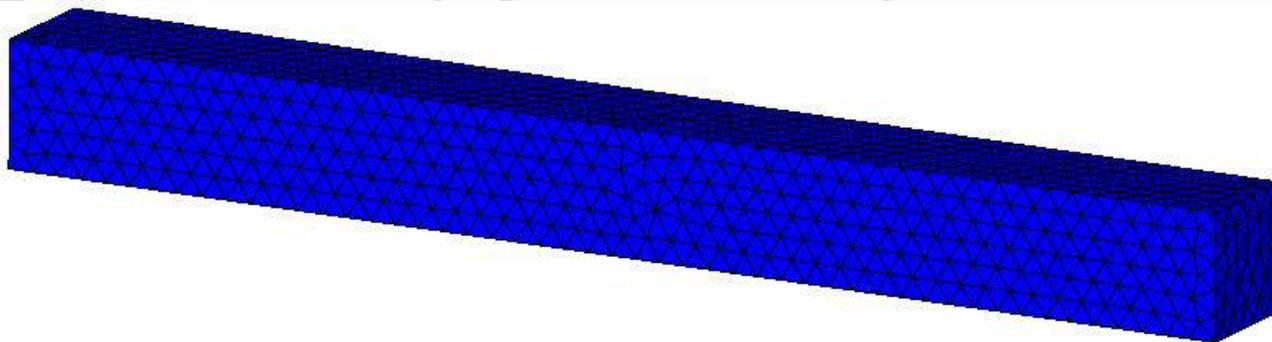
■ **独自改良版 selective FS/NS-FEM** では 9560個の四面体要素と 2288個の節点を使用.

■ **参照解 ABAQUS/Standard** では 1250個の **C3D20H** (六面体2次ハイブリッド要素) と 6696個の節点を使用.

■ S-FEMそのものの検証の為, メッシュリゾーニングは実施しない.

# 検証解析例1

$D_1 = 2 \text{ PPa}^{-1}$  ( $\nu_0 = 0.499999$ )の時の解析結果



Mises Stress (Pa)



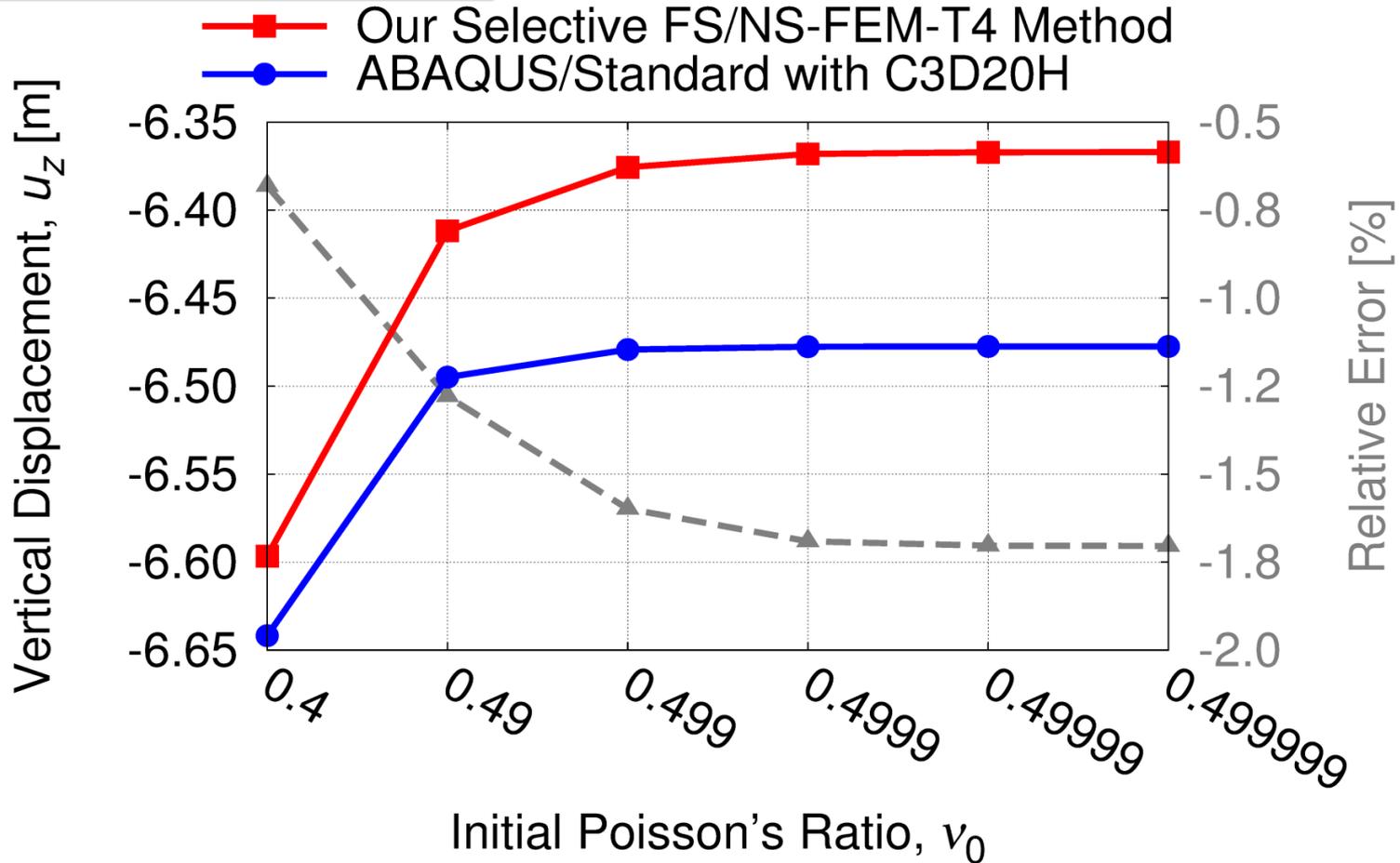
たわみ量は  
およそ -6.5 m  
となった。

なお、この問題を  
定ひずみ四面体要素  
で解くと、たわみ量は  
たったの -0.1 m  
となってしまふ。



# 検証解析例1

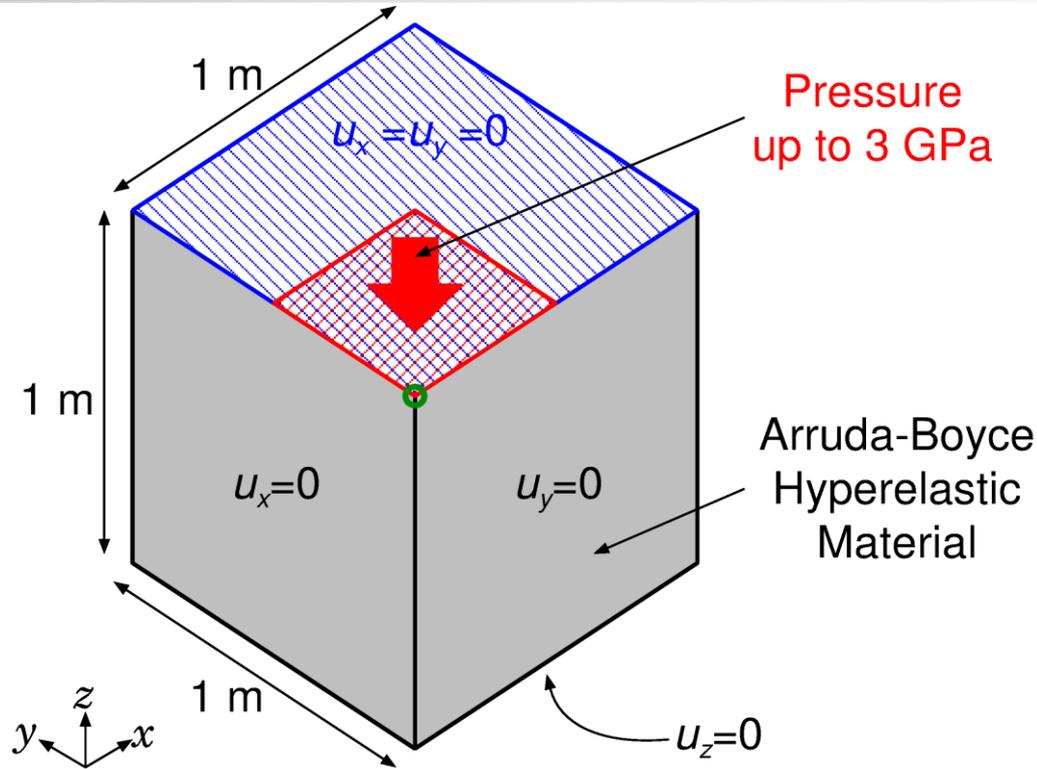
## 先端たわみ量の比較



**提案手法**は大たわみ問題において  
ロッキングを起こさない！！

# 検証解析例2

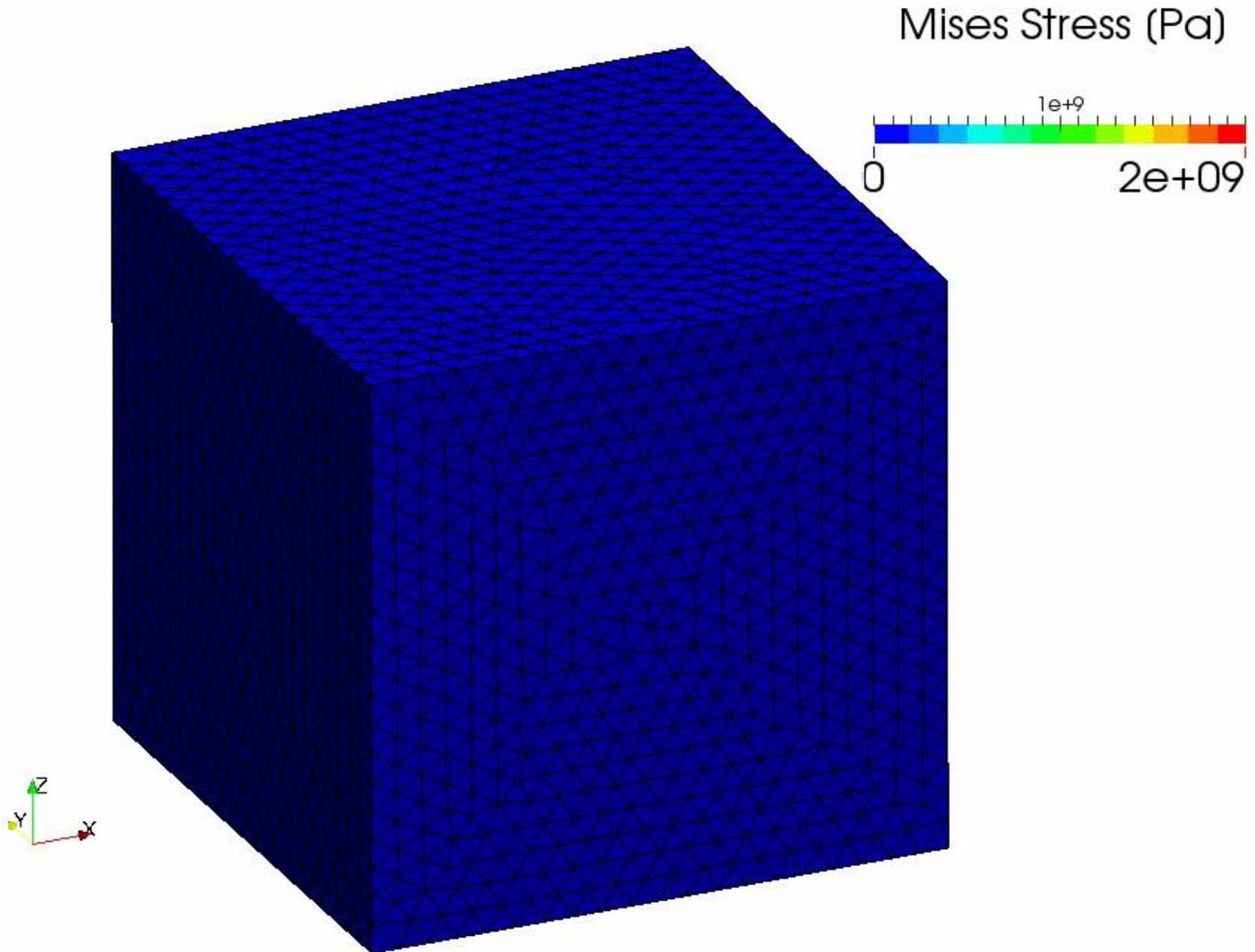
## 立方体の 押し込み解析 概要



- Arruda-Boyce超弾性体 ( $\nu_{ini} = 0.4999$ )
- 上面の $\frac{1}{4}$ に圧力荷重を負荷

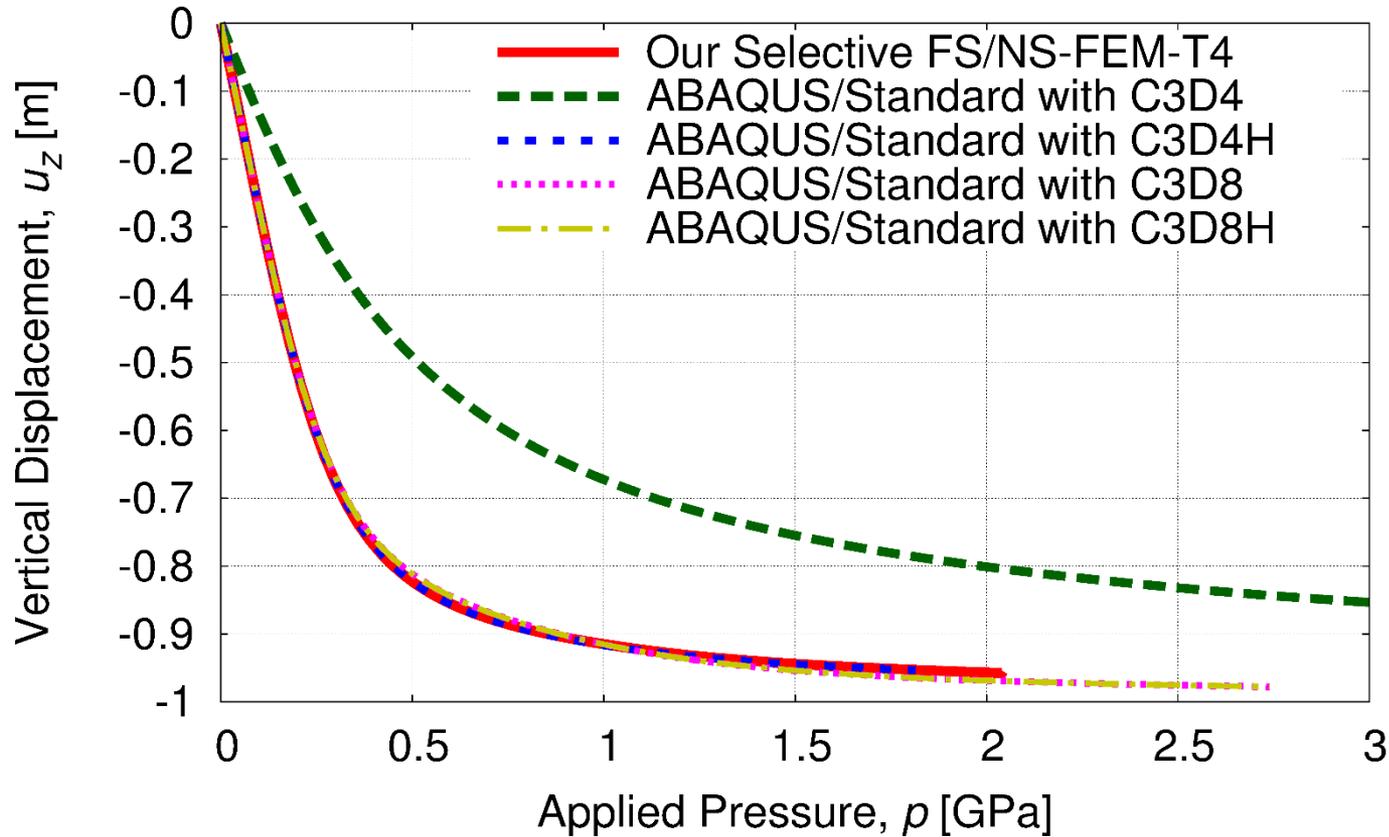
# 検証解析例2

提案  
手法  
での  
解析  
結果



# 検証解析例2

## 角点の垂直変位 vs. 負荷圧



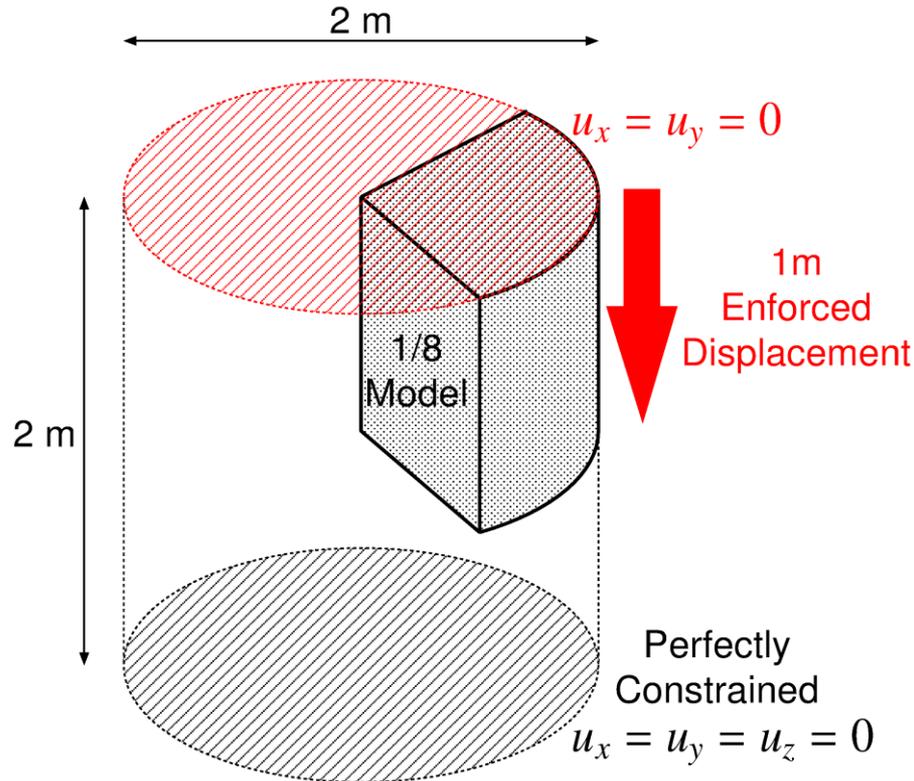
提案手法は  
大ひずみ問  
題でも  
ロッキング  
を起こさな  
い！！

- 一定ひずみ要素 (C3D4)はすぐにロックしている.
- その他の要素および提案手法はロックしていない.
- 提案手法とC3D4Hはほとんど同じ結果を示している.

# 検証解析例3

## 1/8円柱の

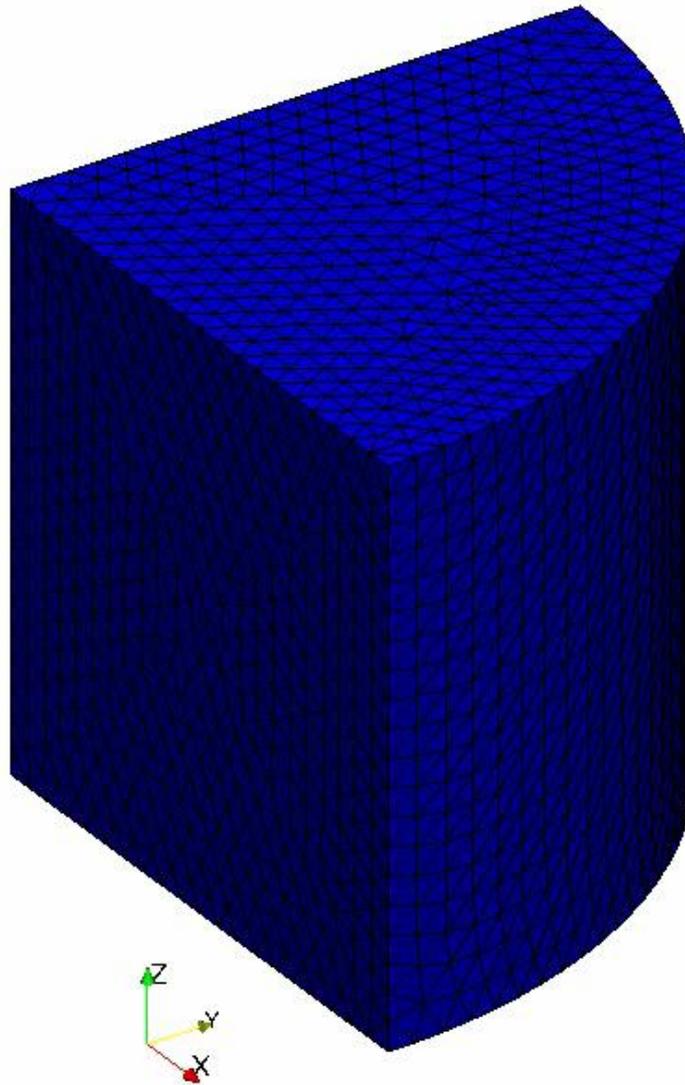
## 押し込め解析概要



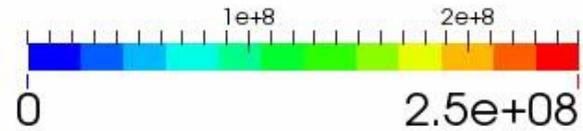
- 軸方向に50%圧縮.
- Neo Hookean超弾性体  $C_{10} = 40 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $D = 5 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$  (i.e.,  $\nu_{ini} = 0.4999$ ).
- 完全に同一のメッシュ分割で, ABAQUS/StandardのC3D4Hと結果を比較.

# 検証解析例3

提案手法  
での  
解析結果



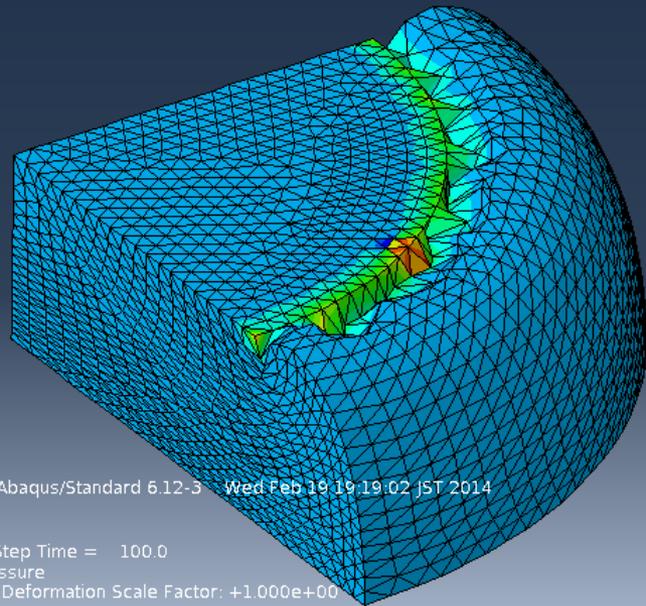
Mises Stress (Pa)



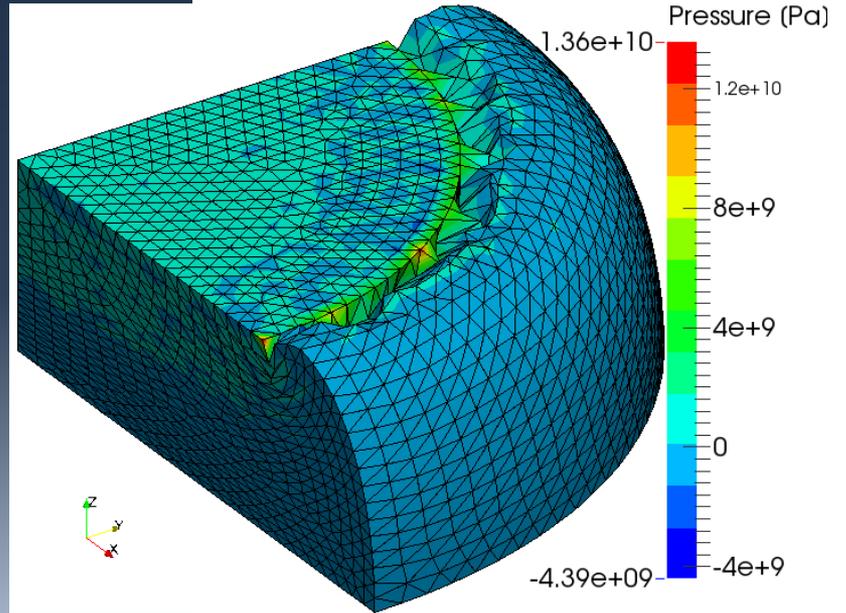
# 検証解析例3

## ABAQUSのC3D4Hとの比較

C3D4H  
of ABAQUS/Standard



Our Selective  
FS/NS-FEM-T4

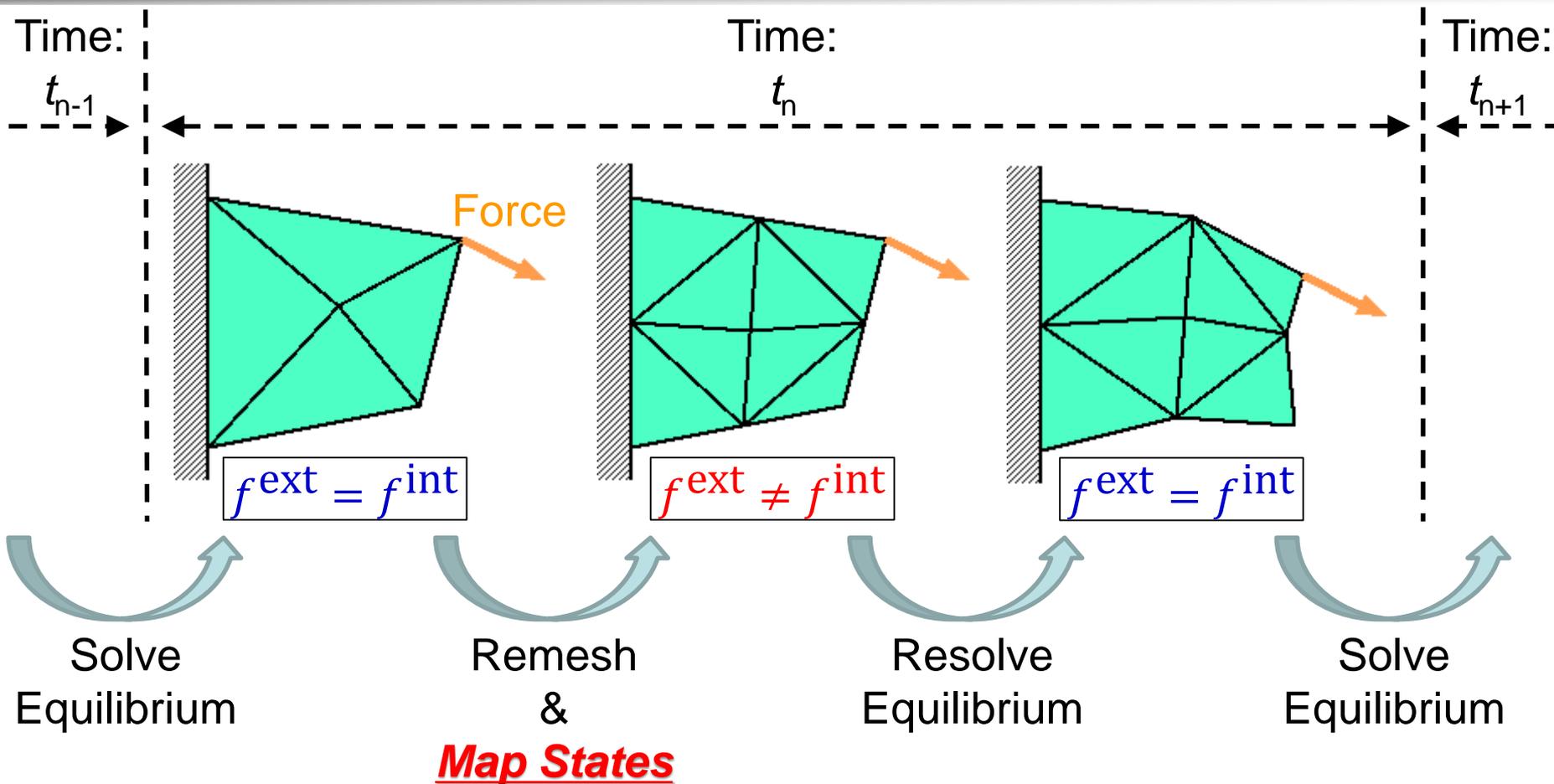


- 変形形状は互いに酷似している。
- 提案手法の圧力振動の振幅がC3D4Hの約2倍。

S-FEMに適合する  
メッシュリゾーニング法の解説  
および  
メッシュリゾーニング有りの解析例紹介



# メッシュリゾーニング手順



状態量のマッピング処理の内容は材料モデル毎に多少異なる。

# 状態量のマッピング処理

## 弾性体および超弾性体の場合

$$\text{i.e., } [T] = [T([F])]$$

- 各nodeの初期位置 $\{x^{\text{initial}}\}$ を要素形状関数を用いてマップした後, それを用いて各edgeおよびnodeの変形勾配テンソル $[F]$ を作り直す. (以上, これだけ.)

各nodeにその初期位置を保持させることにより, 除荷を行った際には初期形状に正確に戻すことができる.

本発表の定式化ではこの点を重視.  
(増分形の定式化を用いると, この点は犠牲になる.)



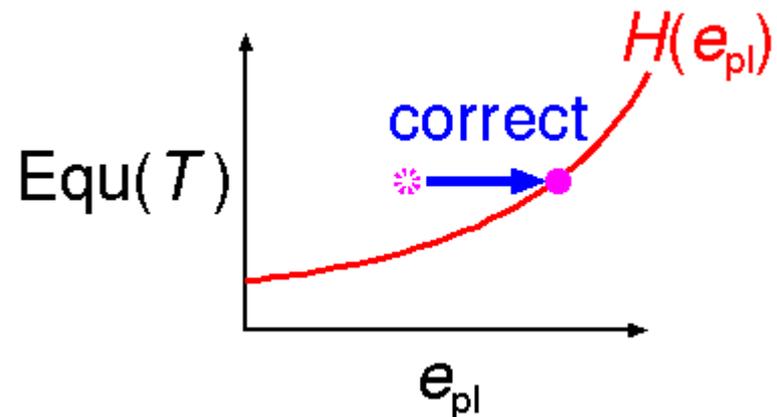
# 状態量のマッピング処理

## 弾塑性体の場合

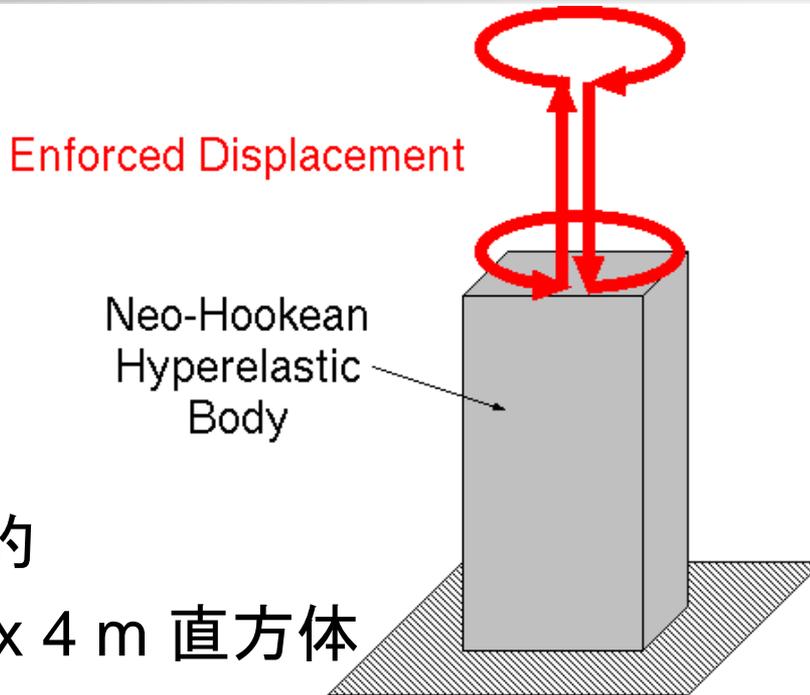
弾性体の場合の処理に加えて下記の処理を行う。

1. 相当塑性歪み ( $e_{pl}$ ) や塑性歪み ( $E_{pl}$ ) 等の履歴依存状態量も同様にマッピングを行う。その際、新メッシュの各edge状態量は旧メッシュのedge状態量のみを用いてマッピングを行う。各node状態量も同様。
2. マッピング後の弾性歪みから計算される相当応力がマッピング後の相当塑性歪みにおける降伏応力を超えている場合、弾性歪みから得られる応力が降伏曲線上に位置するように相当塑性歪みを補正する。

相当塑性歪みの時間的連続性を犠牲にする代わりに、応力歪み状態の破綻を防いでいる。



# 超弾性体のねじり引張り



- 3次元, 静的
- 1 m x 2 m x 4 m 直方体
- Neo-Hookean超弾性体:  
 $C_{10} = 1 \text{ GPa}$ ,  $D_1 = 400 \text{ GPa}^{-1}$  ( $\nu_0 \approx 0.48$ )
- 下面を完全拘束し, 上面を360度ねじる  $\Rightarrow$  公称ひずみで100%  
引張る  $\Rightarrow$  ねじりを戻す  $\Rightarrow$  引張りを戻す
- 独自改良版 selective FS/NS-FEM で四面体要素を使用
- 90度ねじり, および50%伸縮ごとにメッシュリゾーニングを実施

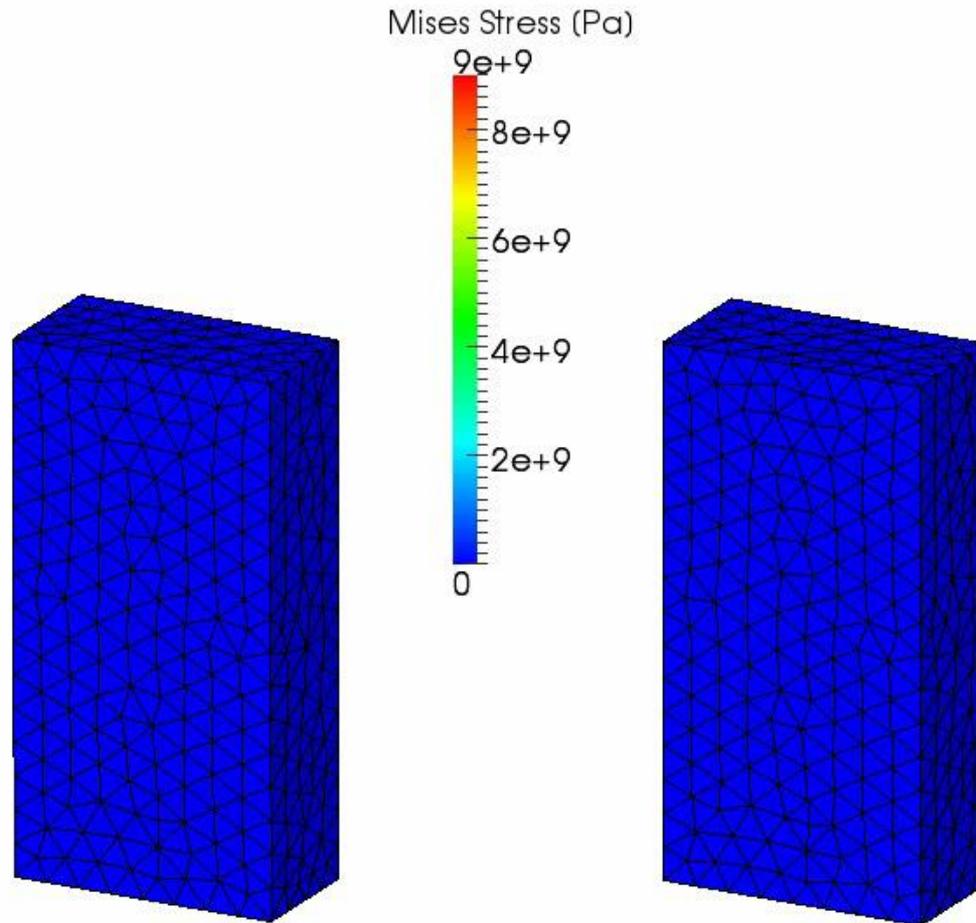
# 超弾性体のねじり引張り

独自改良版  
selective  
FS/NS-FEM

メッシュ  
リゾーニング  
あり

独自改良版  
selective  
FS/NS-FEM

メッシュ  
リゾーニング  
なし



# 超弾性体のねじり引張り

## 最終状態の残留変位

Displacement Magnitude (m)

0.0005

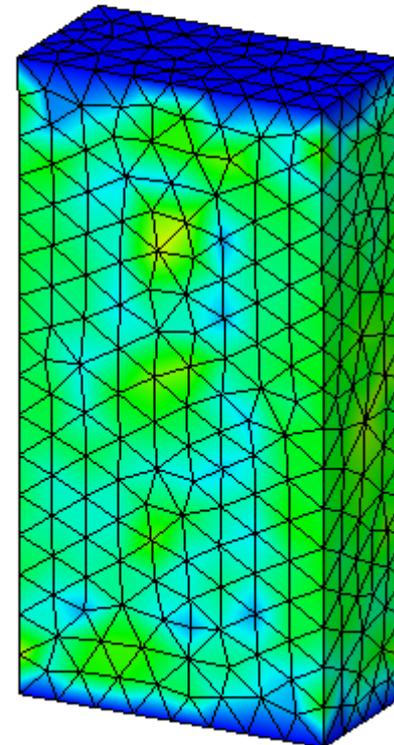
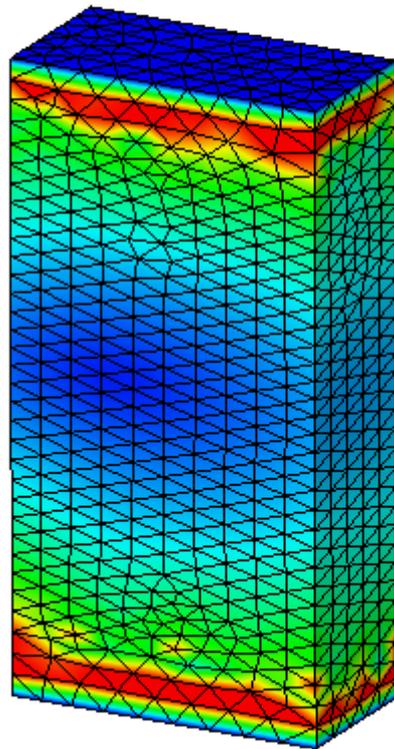
0.0004

0.0003

0.0002

0.0001

0

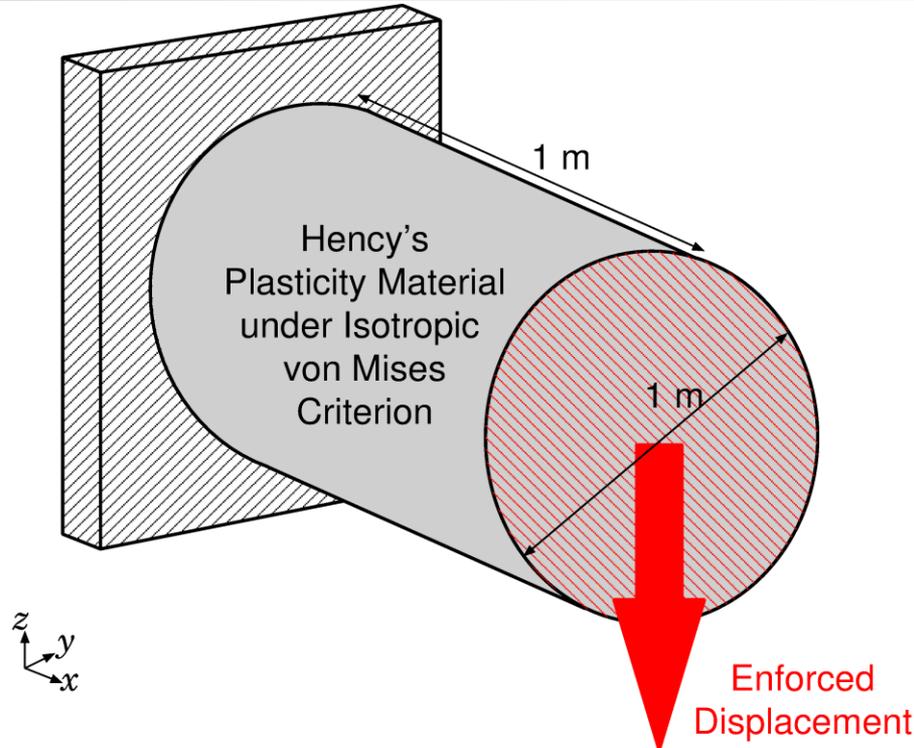


多数回  
メッシュ  
リゾーニング  
を行っても  
正確に  
元の位置に  
戻っている。



# 弾塑性体のせん断ネッキング解析

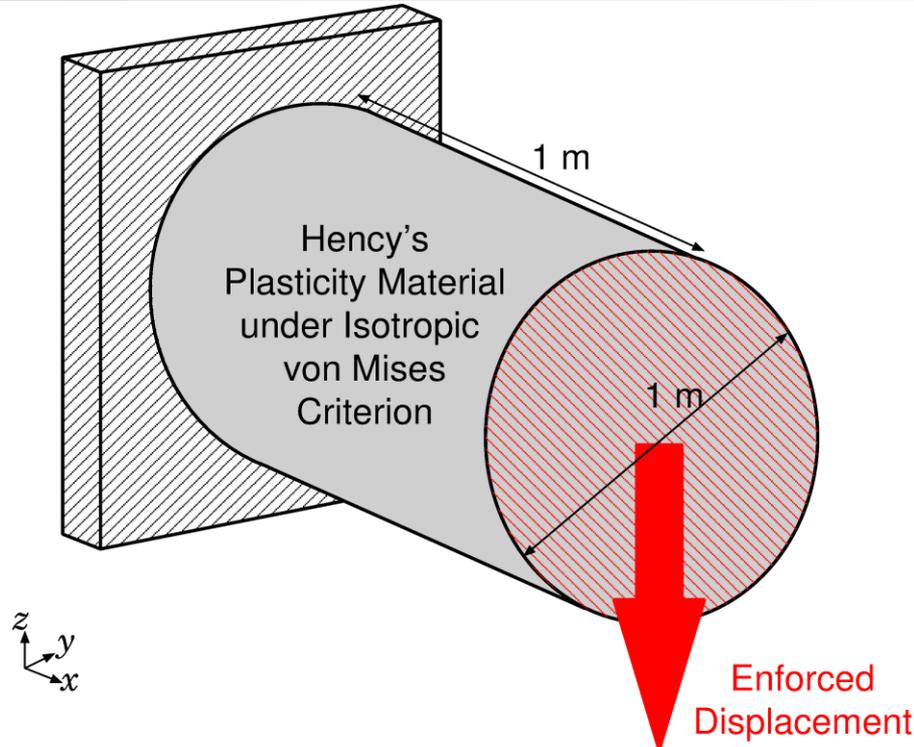
## 解析条件



- 3次元, 静的, 直径1 m 長さ1 mの円柱領域
- 片面を完全拘束
- もう片面を $x, y$ 変位拘束の上,  $-z$ 方向に強制変位
- 独自改良版selective FS/NS-FEMで四面体要素を使用

# 弾塑性体のせん断ネッキング解析

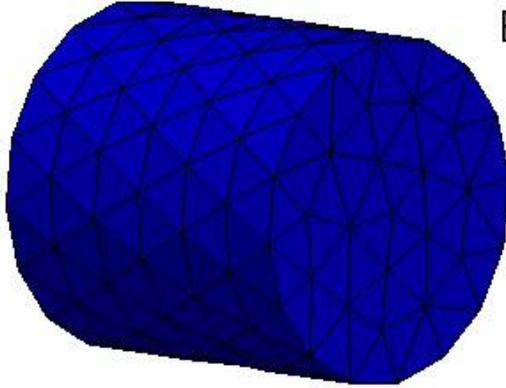
## 解析条件



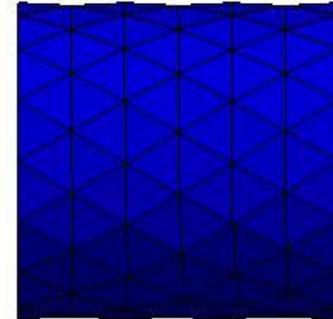
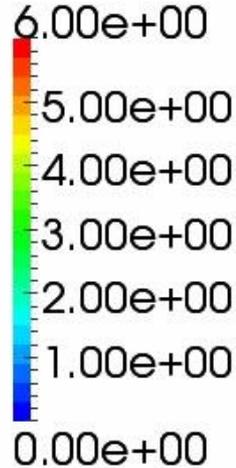
- ジュラルミンを想定したHencky弾塑性体モデル  
( $T = C : h_{el}/J$ ) & von Mises降伏条件 & 等方硬化則
  - ヤング率: 70 GPa, ポアソン比: 0.3
  - 降伏応力: 100 MPa, 塑性係数: 0.7 GPa
- 時間ステップ25回毎にメッシュリゾーニングを実施

# 弾塑性体のせん断ネッキング解析

解析  
結果



Equivalent Plastic Strain



妥当な解が  
得られている。

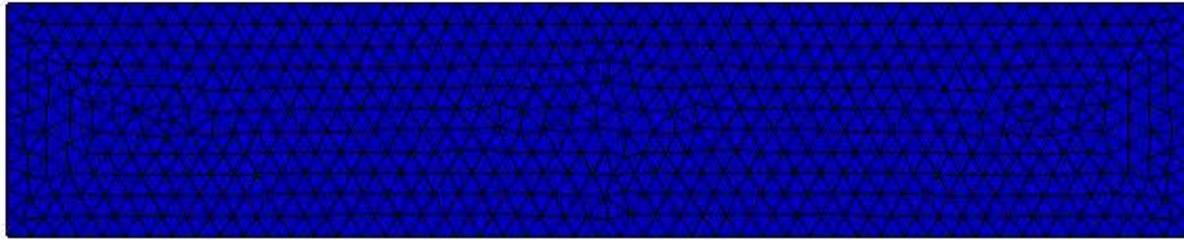
しかし、  
2.8m変位を  
超えた所で  
メッシュ  
リゾーニング  
エラーで  
解析終了。

ネックの最終  
ひずみ( $F_{zz}$ )は  
72.9. つまり  
7000%超の  
公称ひずみ。

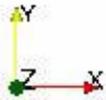


# 弾塑性体のせん断ネッキング解析

2Dの  
解析  
結果

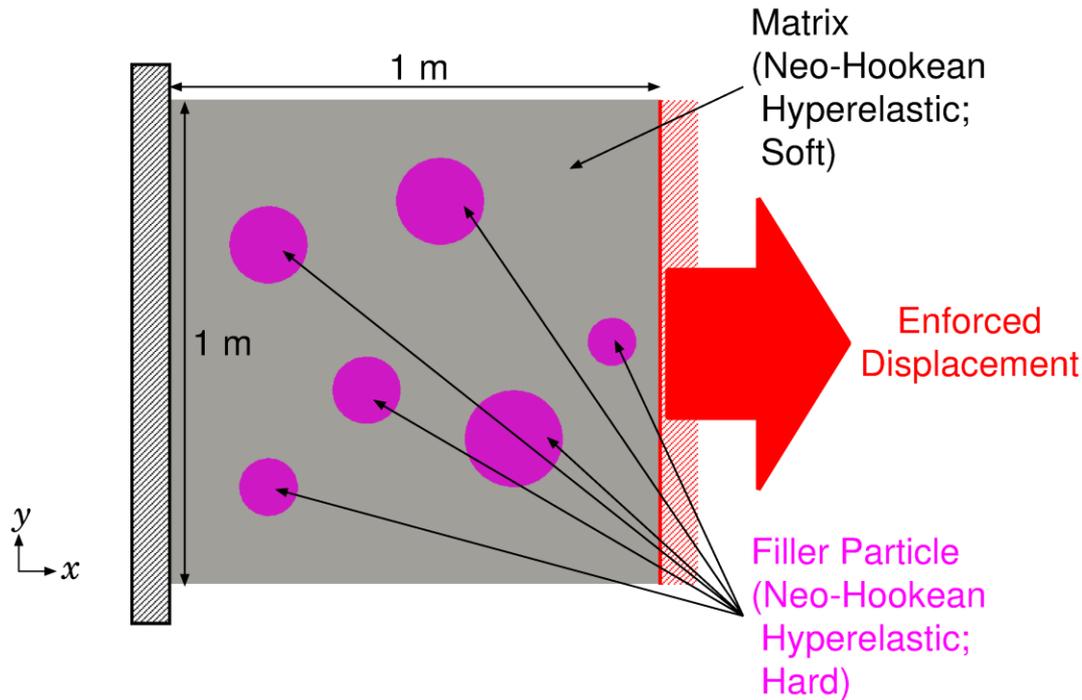


Equivalent\_Plastic\_Strain



# フィラー充填ゴムの引張り解析

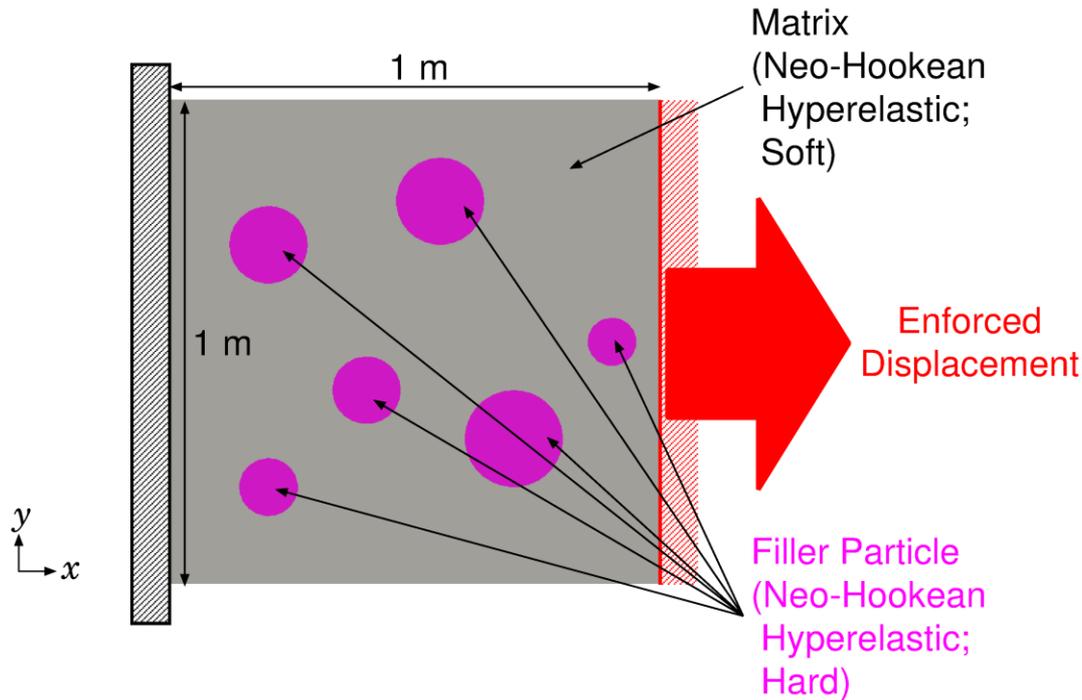
## 解析条件



- 平面ひずみ, 静的, 1 m x 1 mの正方形領域
- 左辺を完全拘束
- 右辺をy変位拘束の上, +x方向に強制変位
- 独自改良版selective ES/NS-FEMで三角形要素を使用

# フィラー充填ゴムの引張り解析

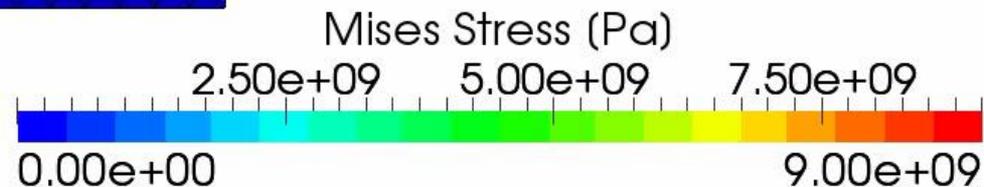
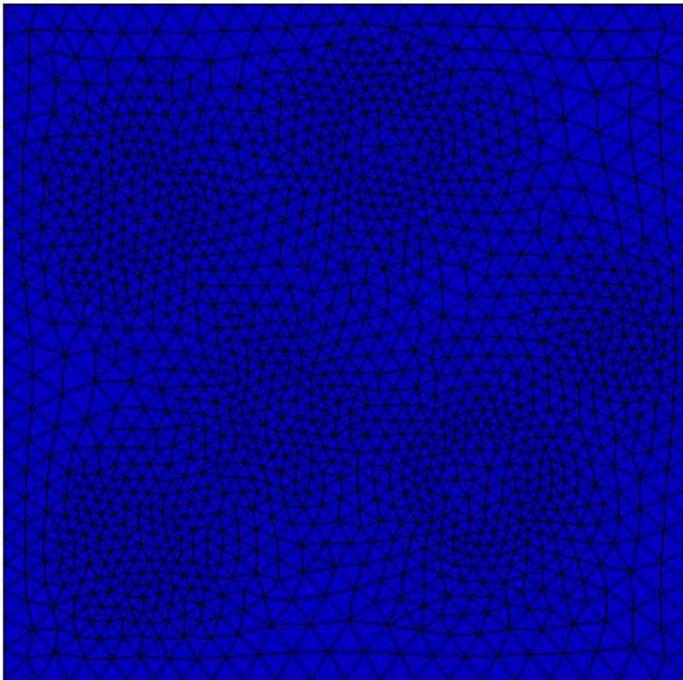
## 解析条件



- フィラー, マトリックス共にNeo-Hookean超弾性体
  - フィラーは硬いゴム ( $E^{\text{initial}} = 100 \text{ GPa}$ ,  $\nu^{\text{initial}} = 0.49$ )
  - マトリックスは柔らかい ( $E^{\text{initial}} = 1 \text{ GPa}$ ,  $\nu^{\text{initial}} = 0.49$ )
- 0.2 m変位毎にメッシュリゾーニングを実施.

# フィラー充填ゴムの引張り解析

## 解析結果



妥当な解が得られている。  
しかし、1.8m変位を超えた所で  
メッシュリゾーニングエラーで解析終了。



# まとめ

# まとめ & 今後の予定

## ■まとめ

- 独自改良版selective S-FEMにより、任意の非線形材料モデルに対して四面体／三角形要素を用いてもロッキングを起こさない大変形解析を実現した.
- 独自改良版selective S-FEMと適合するメッシュリゾーニング法を提案した.

## ■今後の予定

- 圧力振動の抑制方法の検討.
- 応力や歪みの勾配に基づくりメッシングの粗密制御.
- 接触機能の追加.
- ハイブリッドS-FEMの検討.



# 話題提供

- S-FEMの利点は、未知数を増やすことなく微圧縮材料を4面体で解析できる点にある。(Lagrange未定乗数法を使用しない.)
- 提案したS-FEMはむしろ動的陽解法の解析(LS-DYNAの得意とする様な解析)を高精度化する用途に向いているのかも知れない。  
ちなみにC3D4HはABAQUS/Explicitでは使用出来ない。
- その場合は接触や多点拘束などは全てペナルティ法で実装することになる。



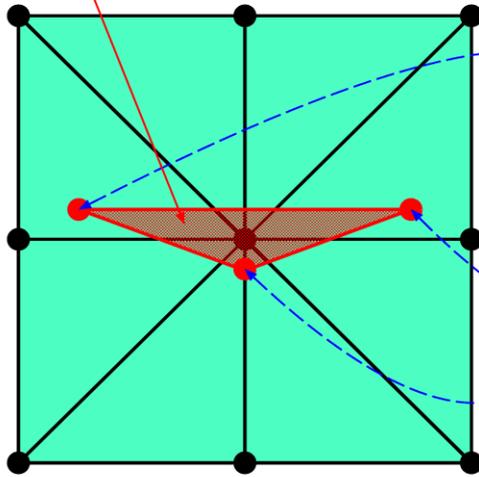
# 付録

# 特徴比較

	FS/NS-FEM-T4	ABAQUS/Standard C3D4H, C3D10I
未知数の数	増えない	増える (未定乗数個分)
剛性マトリックスの形	バンド幅が増えるだけ. ポアソン比0.4999程度であれば反復法で解ける. (良い前処理が見つかればもっといけるかも.)	未定乗数の式が増える. 性的縮約した方程式は、恐らく直接法でないとは解きづらい(はず).
微圧縮材料での圧力振動	大きめ	小さめ
扱える材料モデル	Dev/Volカップリングのない材料	(恐らく)Dev/Volカップリングのある材料もOK
複数材料界面の処理	特別な処理は不要	*TIEを用いる必要あり (未知数がさらに増える)
現状の完成度	まだ開発途上. 接触その他の機能も自ら開発が必要.	完成品. ABAQUSの膨大な機能が全て使える.

# メッシュリゾーニングエラーの原因

The Original Shape  
of the New Element  
(Reversed)

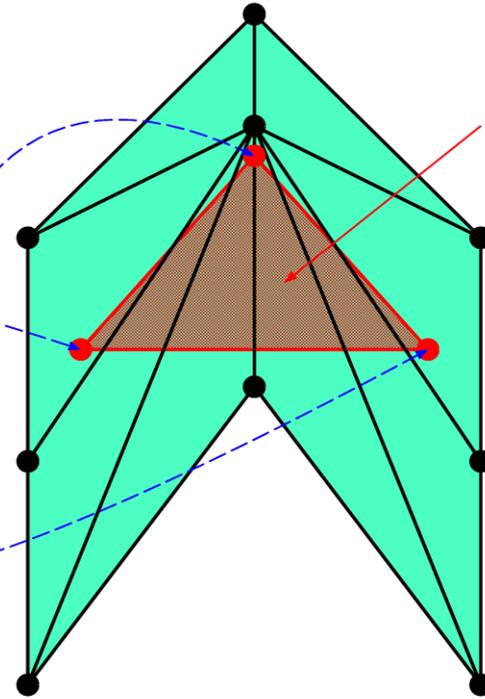


Initial Triangular Mesh

Deformation



A New Element  
Generated in  
Mesh Rezoneing  
(in Good Shape)

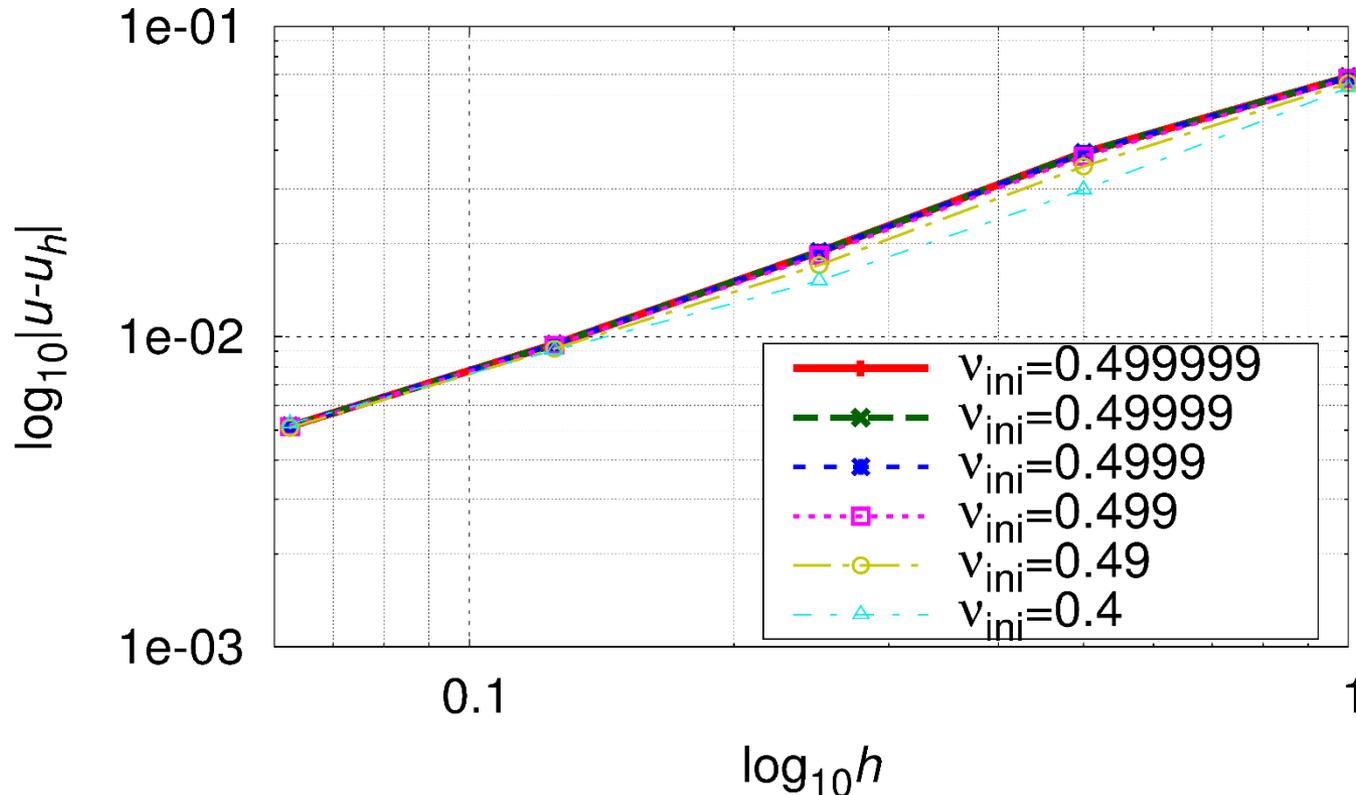


Deformed Initial Triangular Mesh

初期節点位置と現在節点位置から変形勾配テンソル $F$ を作り直す方法をとる場合、元々裏返っている要素の存在は致命的なエラーとなる。

# メッシュサイズに対する収束速度

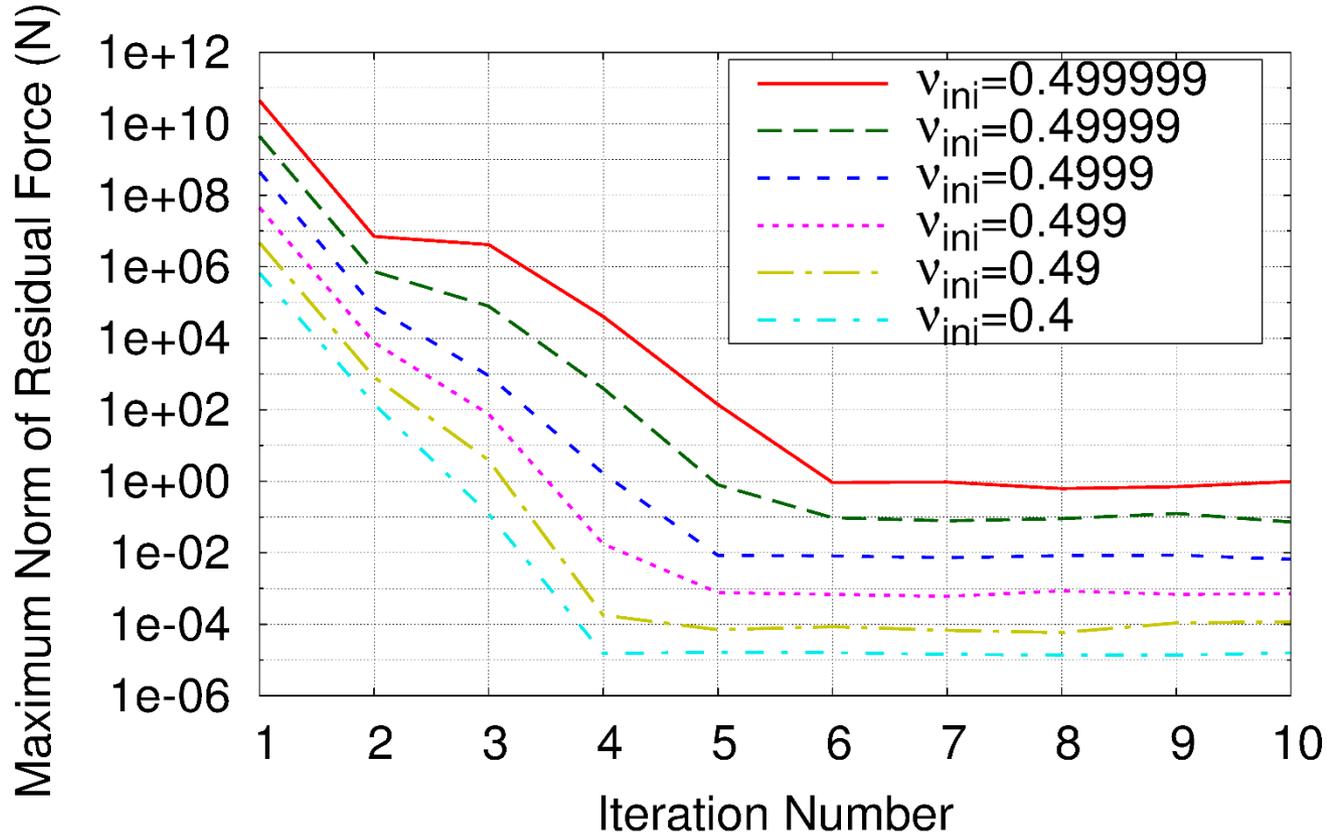
## 片持ち梁の曲げ解析 (Neo Hookean超弾性体) の 先端変位の収束挙動



- 標準的なFEM1次要素と同じ速度の線形収束.
- 非圧縮に近づいても収束速度は同じ.

# Newton-Raphsonループの収束速度

## 片持ち梁の曲げ解析 (Neo Hookean超弾性体) の 最初の時間ステップにおける収束挙動

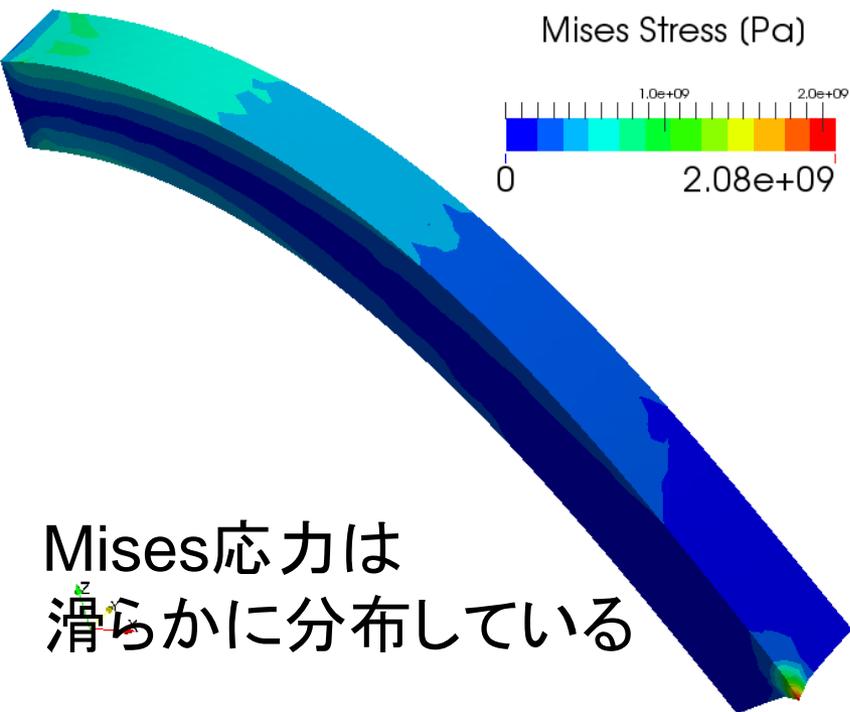


- 収束速度はポアソン比に多少依存している。  
(桁落ちが原因か?)

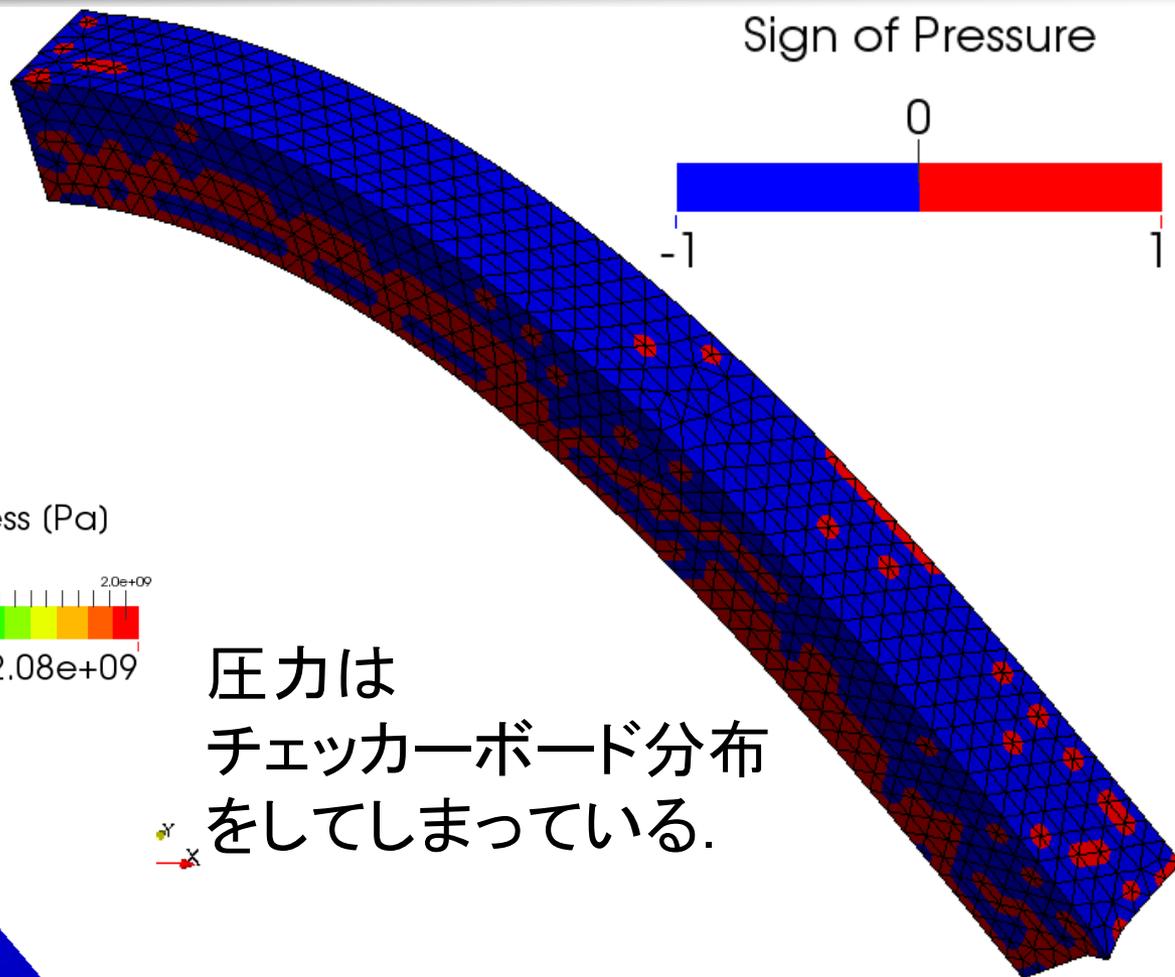


# Mises応力分布と圧力分布

$\nu = 0.499999$  の  
3D片持ち梁曲げ  
解析結果



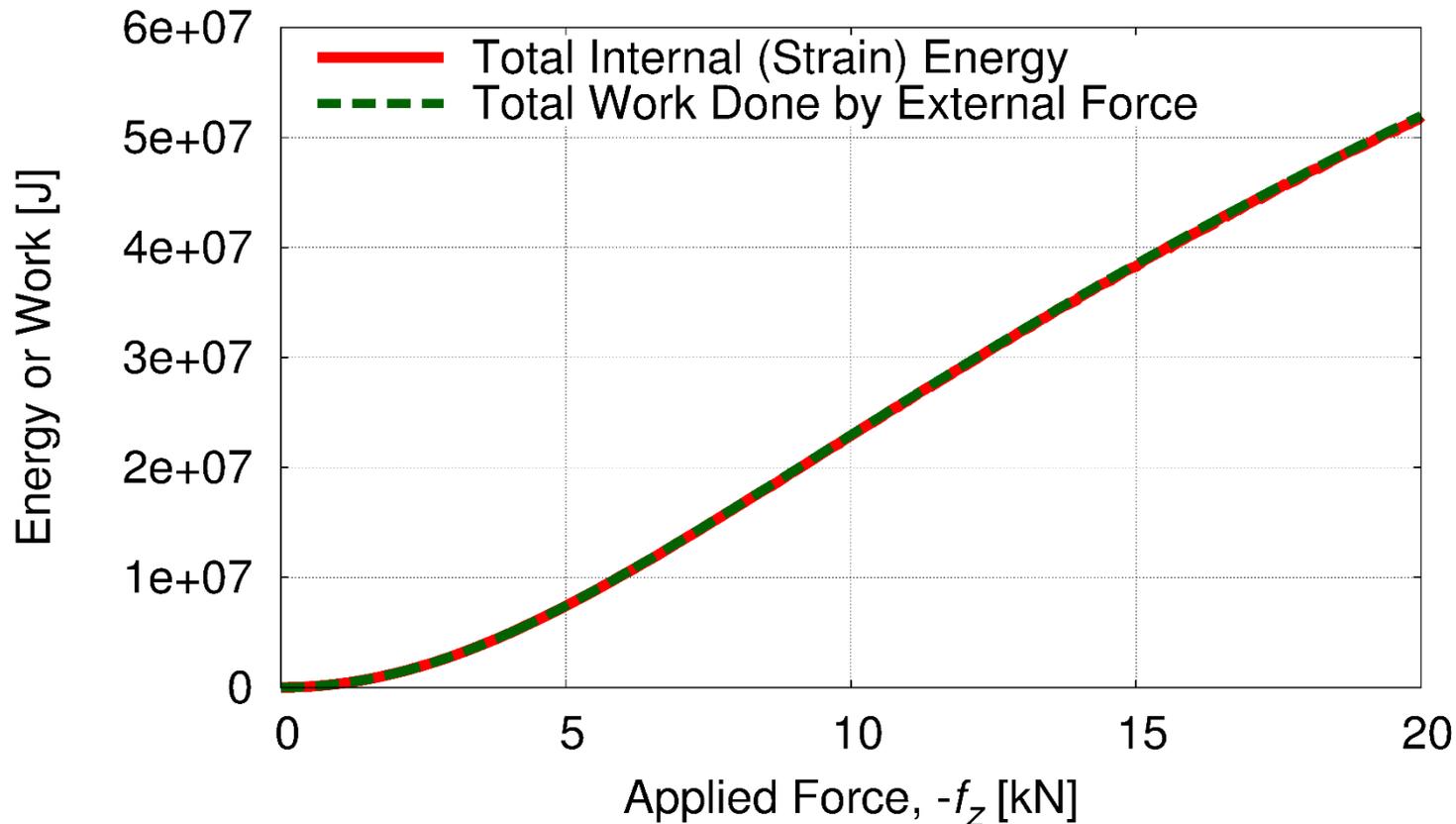
Mises応力は  
滑らかに分布している



圧力は  
チェッカーボード分布  
をしてしまっている。

# 内部エネルギーと外力仕事

$\nu_{ini} = 0.499999$  の3D片持ち梁曲げ解析結果

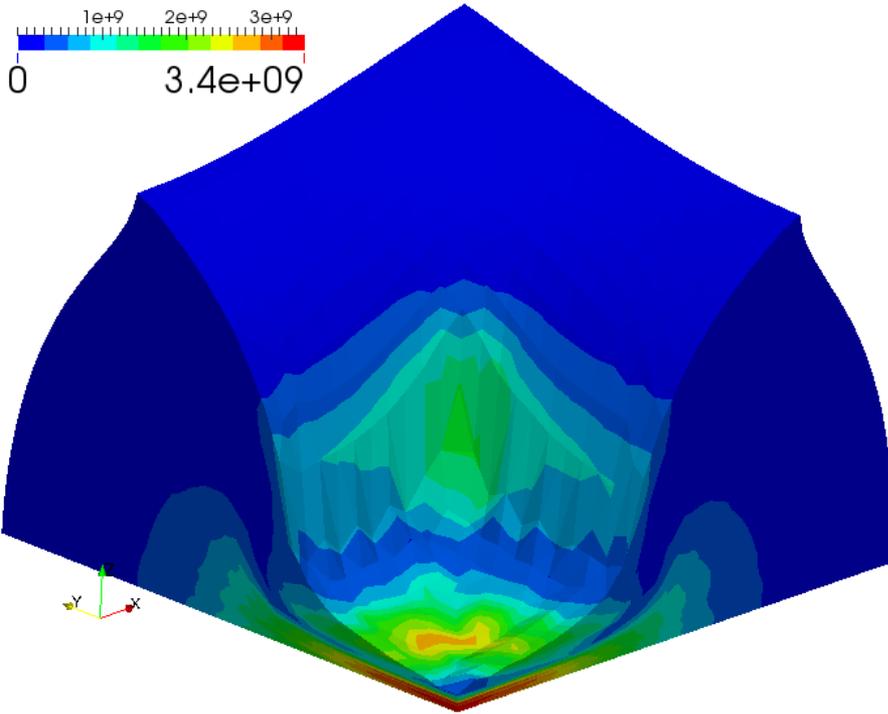
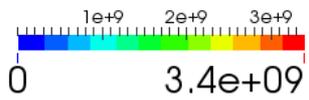


内部エネルギーと外力仕事は一致している。  
⇒ 純粋に圧力振動のみが生じている。

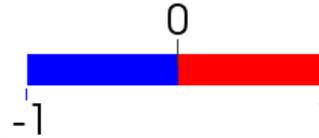


# Mises応力分布と圧力分布

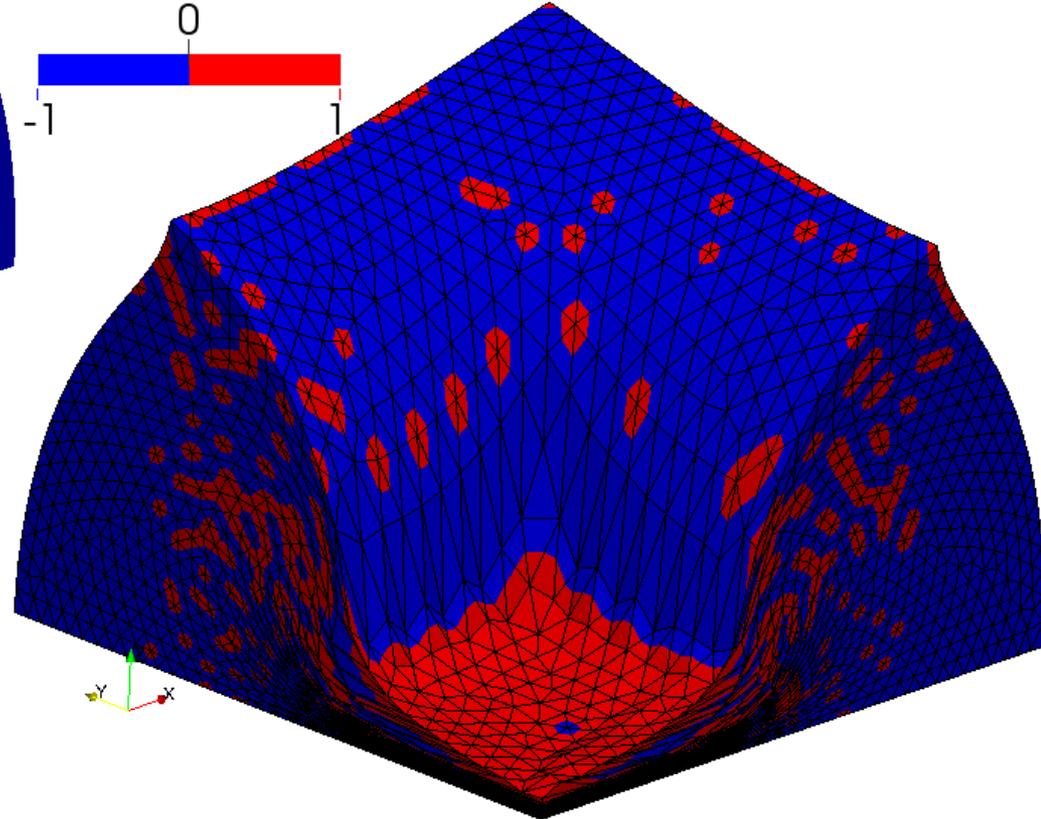
Mises Stress (Pa)



Sign of Pressure



チェッカーボード分布の  
圧力振動が見られる。



角の要素は平滑化されないため  
多少ロッキングを起こしている。