

微圧縮材料に対する 次世代平滑化有限要素法(**EC-SSE-SRI-T4**)の 体積成分計算法の改良に関する試み

大西 有希（東京科学大学 ~~東京工業大学~~）

研究背景

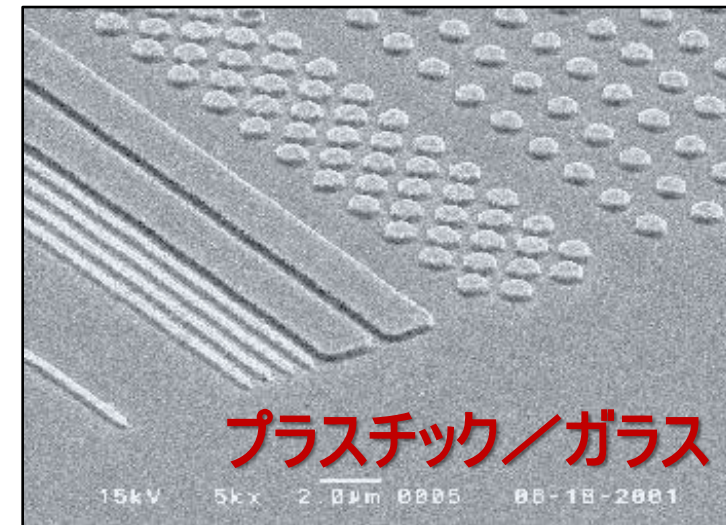
実現したい内容

- 「超」大変形問題を
高精度かつロバストに解きたい.
- 複雑形状を四面体で解きたい.
- 微圧縮性が現れる材料も解きたい.
- 自動リメッシングも実現したい.
- 接触も扱いたい.



現状

精度・大変形ロバスト性・計算速度の三拍子が揃った四面体定式化が今だに確立されていない...

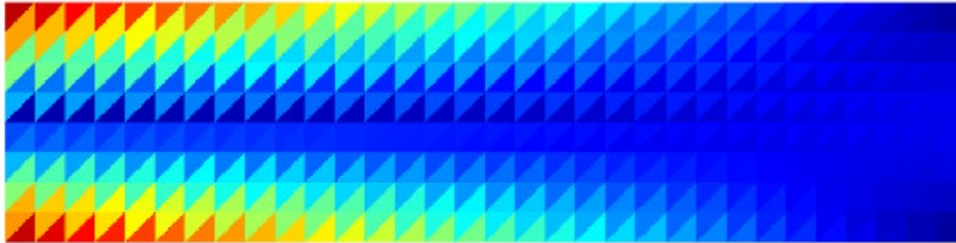


エッジ中心ひずみ平滑要素 (EC-SSE) の可能性

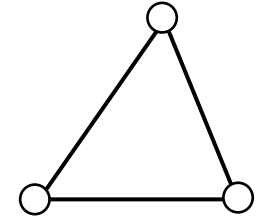
片持ち梁の曲げのMises応力分布比較 (3節点三角形メッシュ)

T. Jinsong et al., Euro. J. Mech. /A, v95, 2022.

FEM-T3



応力分布が階段状で低精度.
実は, せん断ロッキングも
起こしている.

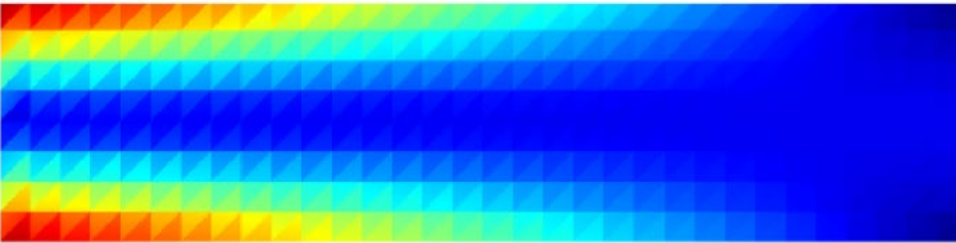


T3

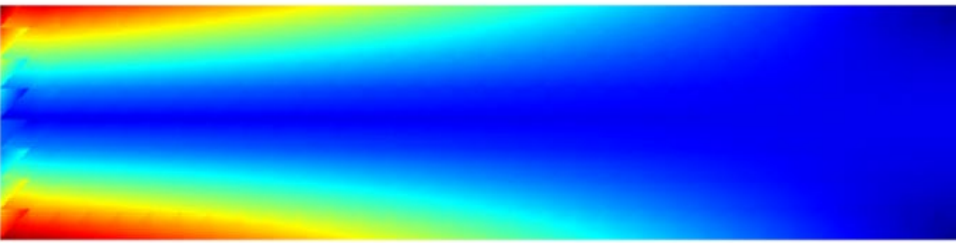
ポアソン比は0.3

詳細は後述

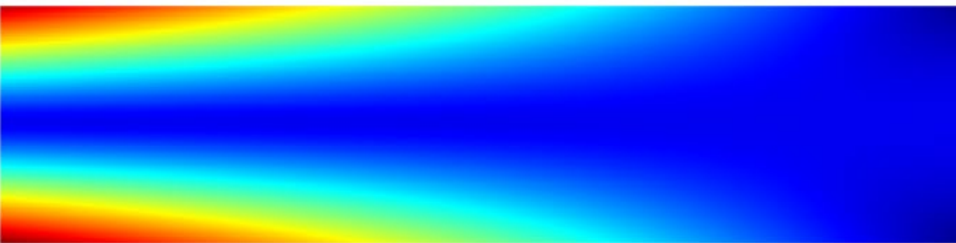
SSE
Strain
Smoothing
Element



EC-SSE
Edge
Centered
SSE

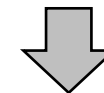


Analytic



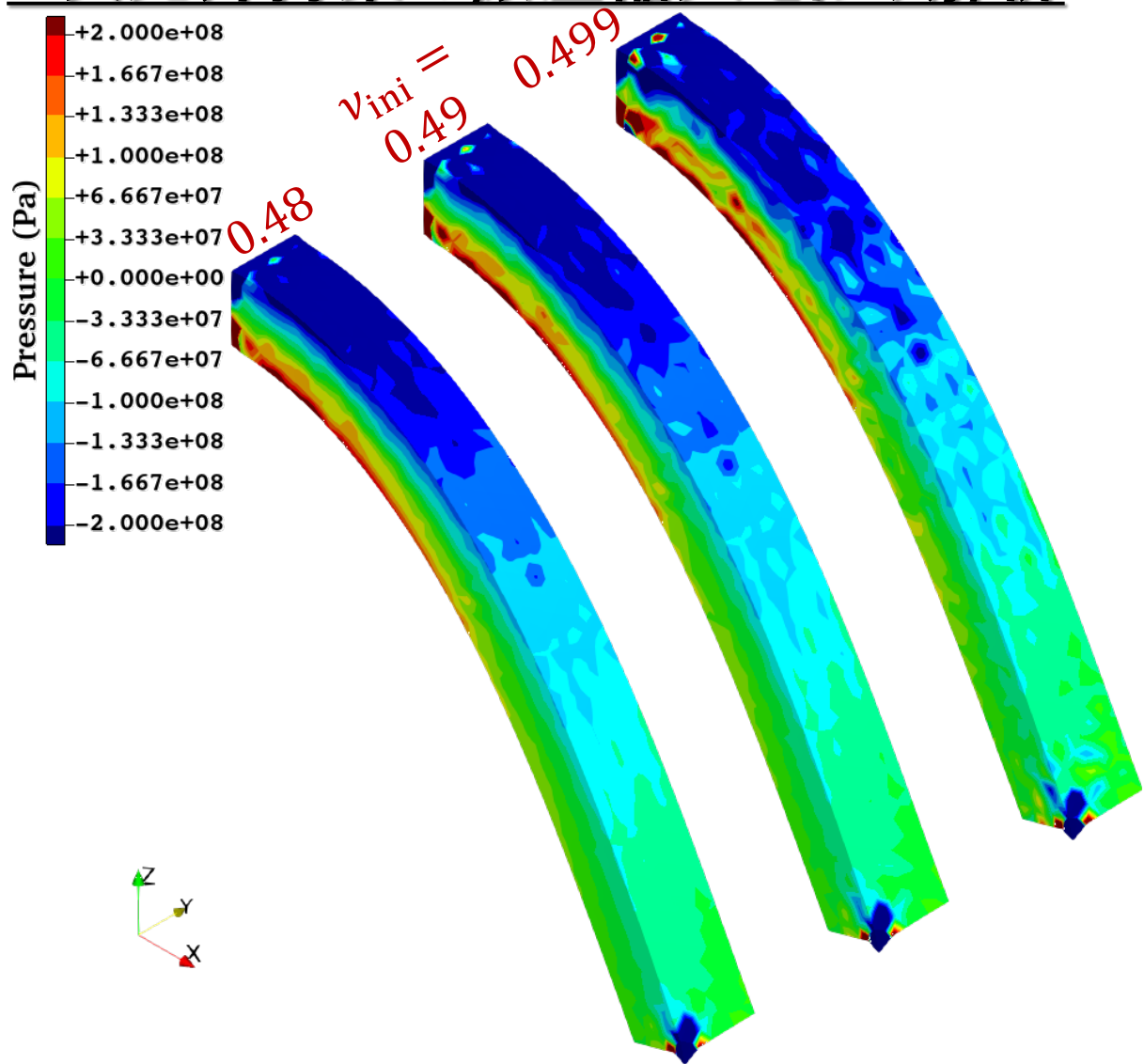
- ひずみ/応力が要素内で線形分布なので高精度.
 - 更にEC-SSEではひずみ/応力の連続性もある.
 - せん断ロッキングなし.
- ただし, 微圧縮だと
- 体積ロッキングあり.
 - 圧力チェッカーあり.

次世代のS-FEM
「S-FEM 2.0」
と呼ぶにふさわしい
飛躍的進歩



昨年, ポアソン比0.49までのゴム大変形に
拡張してみた ⇒ EC-SSE-SRI-T4

3次元片持梁の微圧縮大たわみ解析



課題	状況
精度	せん断/体積ロッキングはないが、ポアソン比 0.49 でも 圧力チェッカーボーディング を抑え切れてはいない.
大変形ロバスト性	問題なし.
計算時間	FEM-T4の 約7倍

圧力チェッカーボーディングがあると・・・

- 圧力だけでなく、 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} の値も信用できなくなる.
- 特に大滑りの接触解析で接触不安定が起こる. などの問題が生じる.

つまり、現状のEC-SSE-SRI-T4は
駄目とまでは言えないが
決定版の定式化と言うには弱い.

ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法(EC-SSE-SRI-T4)に唯一残る**圧力チェッカーボーディング**の問題を**低コスト**で抑制する改良手法について検討を行う。

発表目次:

- 手法: EC-SSE-SRI-T4の定式化と改良手法の紹介
- 結果と考察: 解析例の紹介 と 計算コストの考察
- まとめ

手法

EC-SSE-SRI-T4の定式化と改良手法の紹介

NS-FEMの定式化概要

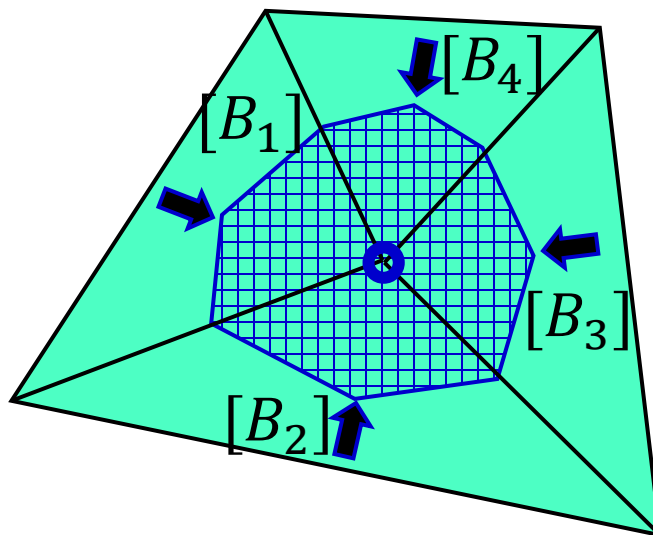
下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各ノードにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, ノード平滑化領域の $[^{\text{Node}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Node}}B]$ を用いて各ノードのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ガウス点が
各ノードに
あるイメージ

ひずみ分布は
各平滑化領域内で
一定



三角形/四面体メッシュで
せん断・体積ロッキングを
回避できるが,

圧力チェッカーボーディングは
残存してしまう,
疑似低エネルギーモード
(アワーグラスモードの類)
が現れてしまう.

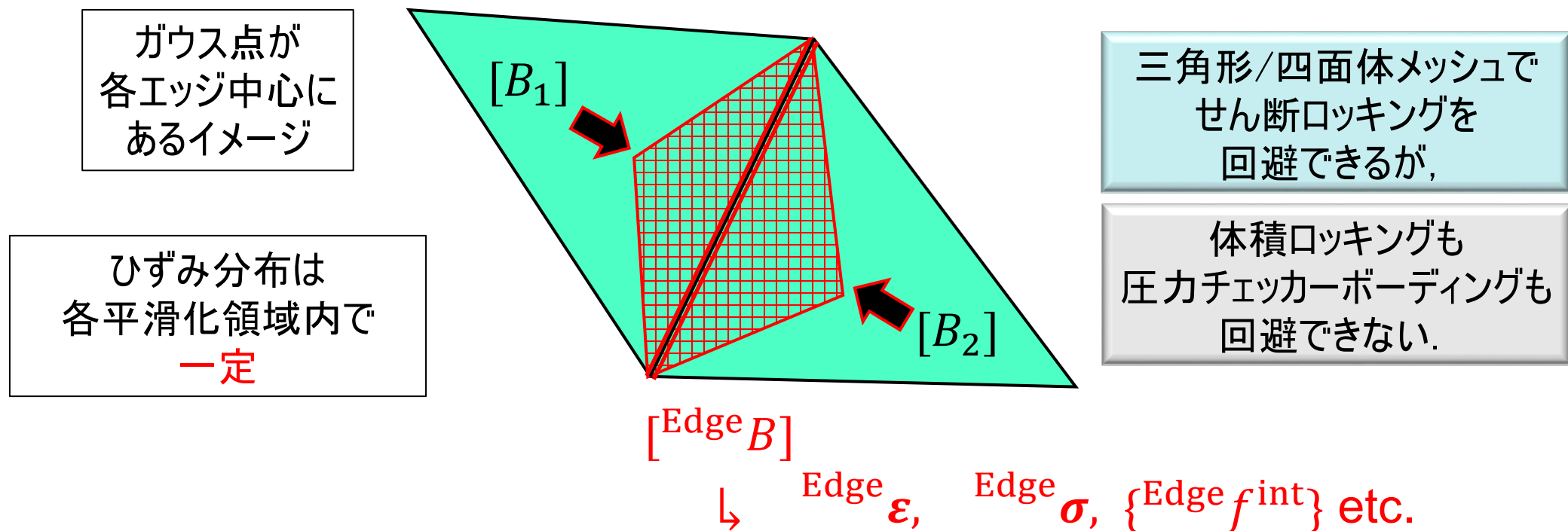
$[^{\text{Node}}B]$
↳ $\text{Node } \varepsilon, \text{ Node } \sigma, \{\text{Node } f^{\text{int}}\} \text{ etc.}$

ES-FEMの定式化概要

下図のような3節点三角形メッシュがあるとする.

- 各セルのひずみ-変位マトリックス $[B]$ を通常のFEMと同様に作る.
- 各エッジにて周辺セルの $[B]$ を集め, 集めた各セルの体積を重みとして $[B]$ を平均化し, エッジ平滑化領域の $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- $[^{\text{Edge}}B]$ を用いて各エッジのひずみ ε ・応力 σ ・節点内力 $\{f^{\text{int}}\}$ を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.



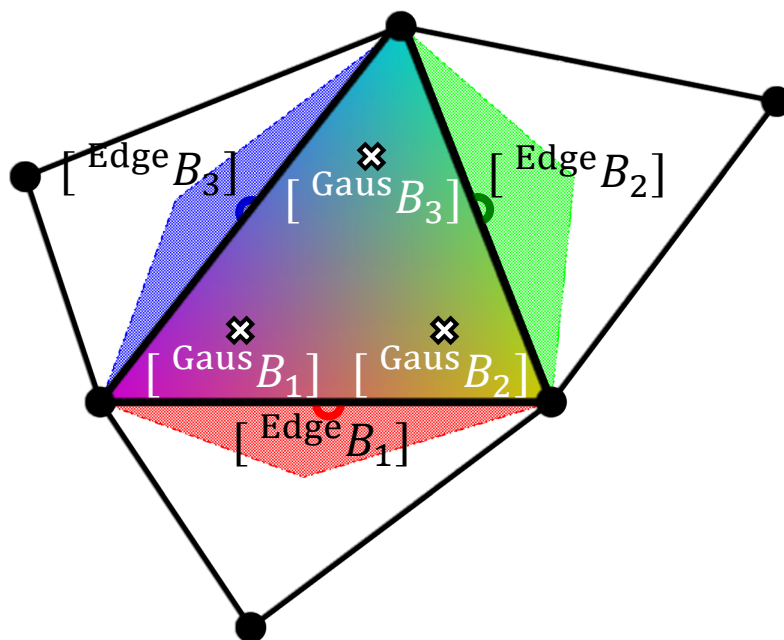
EC-SSEの定式化概要

- ES-FEMと同じ手順で各エッジの $[Edge B]$ を作る.
- $[Edge B]$ は各エッジ中心の物で, 各セル内で線形分布だと考える.
- $[Edge B]$ をセル内の3ガウス点へと外挿して $[Gaus B]$ を作る.
- $[Gaus B]$ を用いて各ガウス点のひずみ・応力を計算し, 三角形2次要素と同様にガウスの3点積分で節点内力を計算する.

簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

ひずみ平滑化を
2回行って
ガウス点で
ひずみ/応力を
評価・積分する

ひずみ分布は
各セル内で線形
かつ
エッジ中心で連続



三角形/四面体メッシュで
せん断ロッキングを
回避できる上に,
ひずみ/応力の
メッシュ収束が極めて速い

体積ロッキングも
圧力チェッカーボーディングも
回避できない.

EC-SSE-SRIの定式化概要

微圧縮材料に対応するため、EC-SSEに選択的低減積分(SRI)を適用.

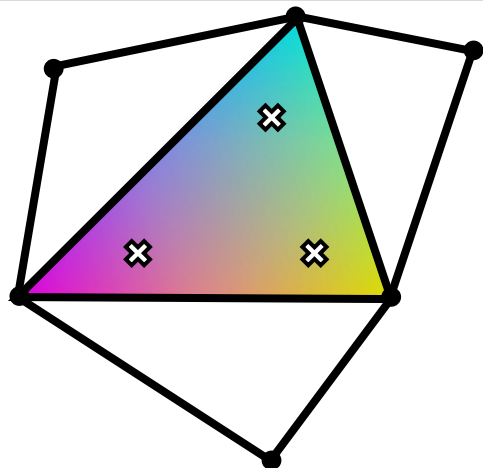
簡単のため
2次元の
3節点三角形
メッシュで
説明します.

(1) EC-SSEによる
各ガウス点での偏差ひずみの計算

(3) NS-FEMによる
各節点での体積ひずみの計算

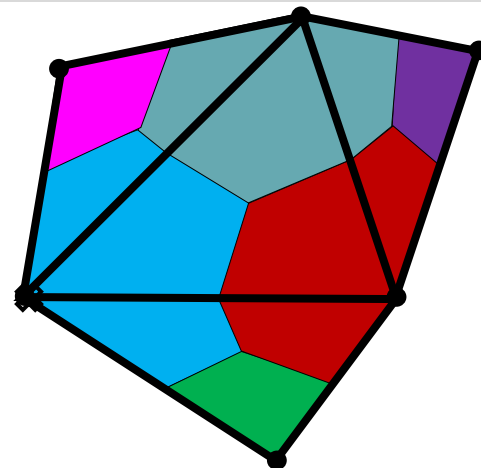
改良
不要

偏差
成分



体積
成分

改良
必要



(2) 各ガウス点での偏差応力と
その節点内力寄与 $\{f_{dev}^{int}\}$ の計算

(4) 各節点での静水圧応力と
その節点内力寄与 $\{f_{vol}^{int}\}$ の計算

選択的低減積分
(SRI)

- せん断ロッキングの回避
- せん断応力精度の向上

- 体積ロッキングの回避
- 圧力チェッカーボーディングの残存

(5) 節点内力 $\{f^{int}\}$ の組み立て

体積成分計算法の改良案 2 種

変位型FEMを保ったまま**圧力チェッカーボーディング**を低減できる改良案は次の2種.

【案1】繰り返し平滑化

例: 節点で平滑化(NS-FEM)の後, 再度セルで平滑化を行い,
セルで圧力を評価する.

デメリット: $[K]$ のバンド幅拡大による計算量の急増.
(粒子法の影響半径を大きくするのと同様.)

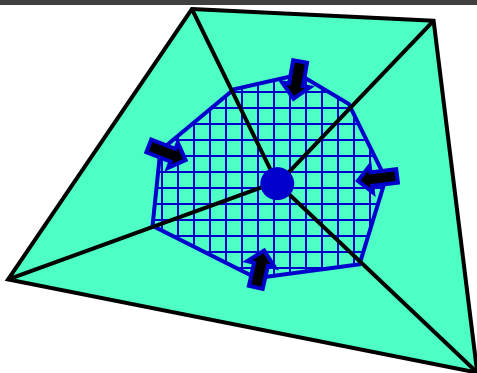
本発表では【案1】の方針を採り,
節点から節点への平滑化を行う
「N2N平滑化」を試した.

【案2】節点内力分配範囲の狭小化

$\{\tilde{\varepsilon}\} = [\tilde{B}]\{u\}, \quad \{\tilde{\sigma}\} = [D]\{\tilde{\varepsilon}\}, \quad \leftarrow$ 応力計算には平滑化後の $[\tilde{B}]$ を用いる一方,
 $\{f^{\text{int}}\} = \int_{\Omega} [B]^T \{\tilde{\sigma}\} V \, dV. \quad \leftarrow$ 節点内力計算には平滑化前の $[B]$ を用いる.

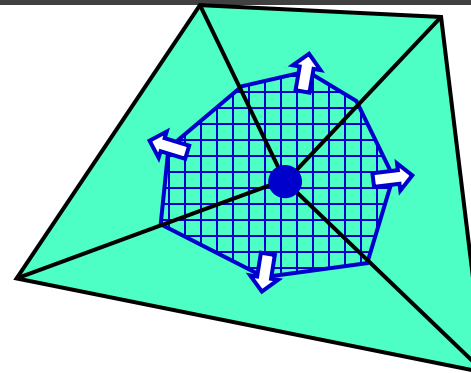
デメリット: $[K]$ の対称性崩壊による動解析時のエネルギー発散.
($[B]^T [D] [B]$ 形式でなくなることにより対称性が失われる.)

体積成分の「N2N平滑化」の目論見



C2N

セルから節点へ分配する平滑化(=NS-FEM)



N2C

節点からセルへ分配する平滑化(=NS-FEM⁻¹)

- 「C2N」のみ(=従来のEC-SSE-SRI-T4)だと圧力チェッカーボーディングが残る.
- 「C2N→N2C」だと, C2Nと比べてほとんど改善しない.
- 「C2N→N2C→C2N」だと, C2Nより改善するが, 影響半径が二回りも大きくなる.

「C2N→N2N」なら影響半径を一回りしか大きくせずに
圧力チェッカーボーディングの改善が見込めないか？

【お詫び】

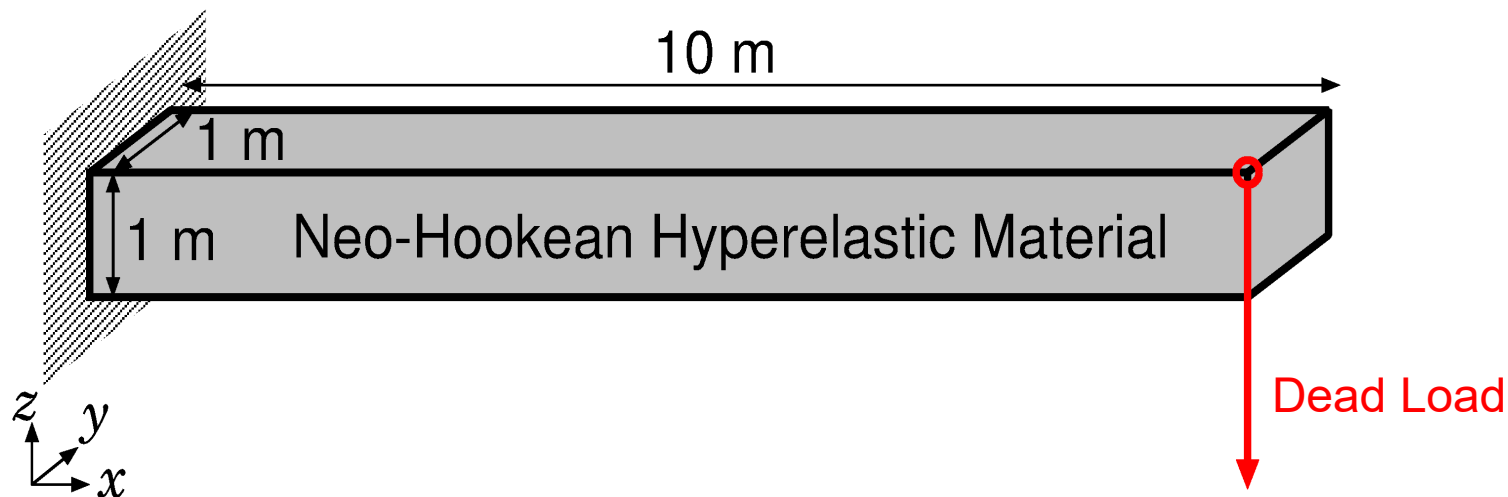
今回実施した「C2N→N2N」(詳細は予稿に記載)は, C2N→N2C→C2Nと同様, 影響半径を二回り大きくしていることが判明しました. 従って, 従来の2回繰り返し平滑化と比べて速度が改善しない定式化となっています.

結果と考察

解析例の紹介 と 計算コストの考察

片持ち梁の曲げ解析

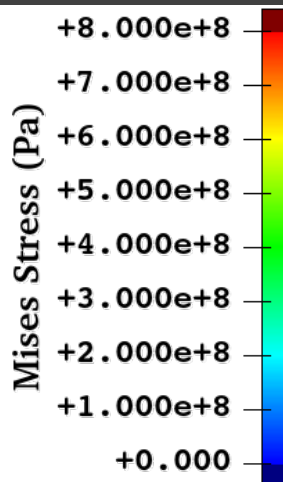
概要



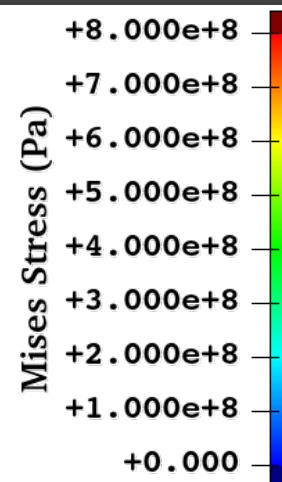
- 10 m x 1 m x 1 m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6$ GPa, $\nu_{ini} = 0.49$)
- 先端の最終たわみが約6.5 mの大たわみ問題.

片持ち梁の曲げ解析

Mises応力 解析結果 (最終状態)



EC-SSE-SRI-T4



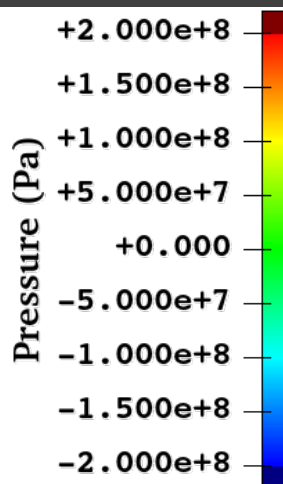
改良版
EC-SSE-SRI-T4

- 両者に目立った違いなし.
- 節点変位・反力にも問題なし(詳細略).

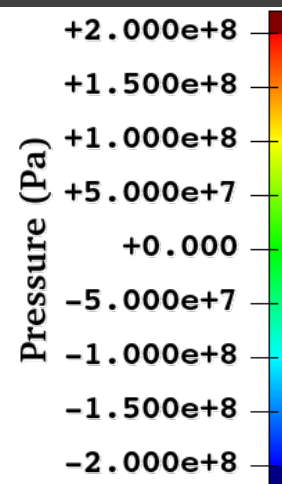


片持ち梁の曲げ解析

圧力 解析結果 (最終状態)



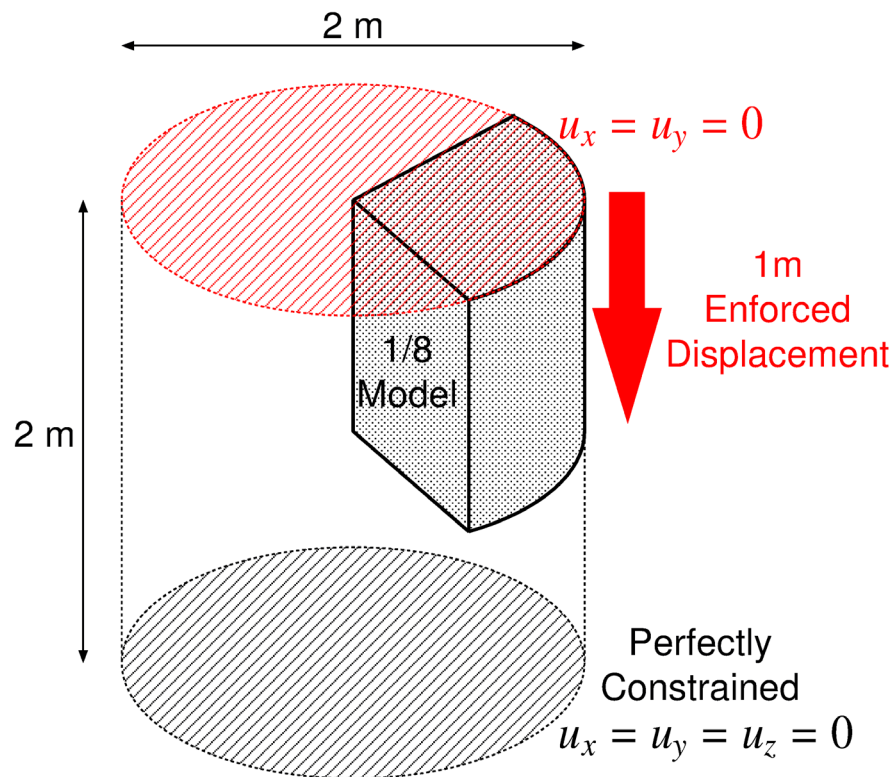
EC-SSE-SRI-T4



改良版
EC-SSE-SRI-T4

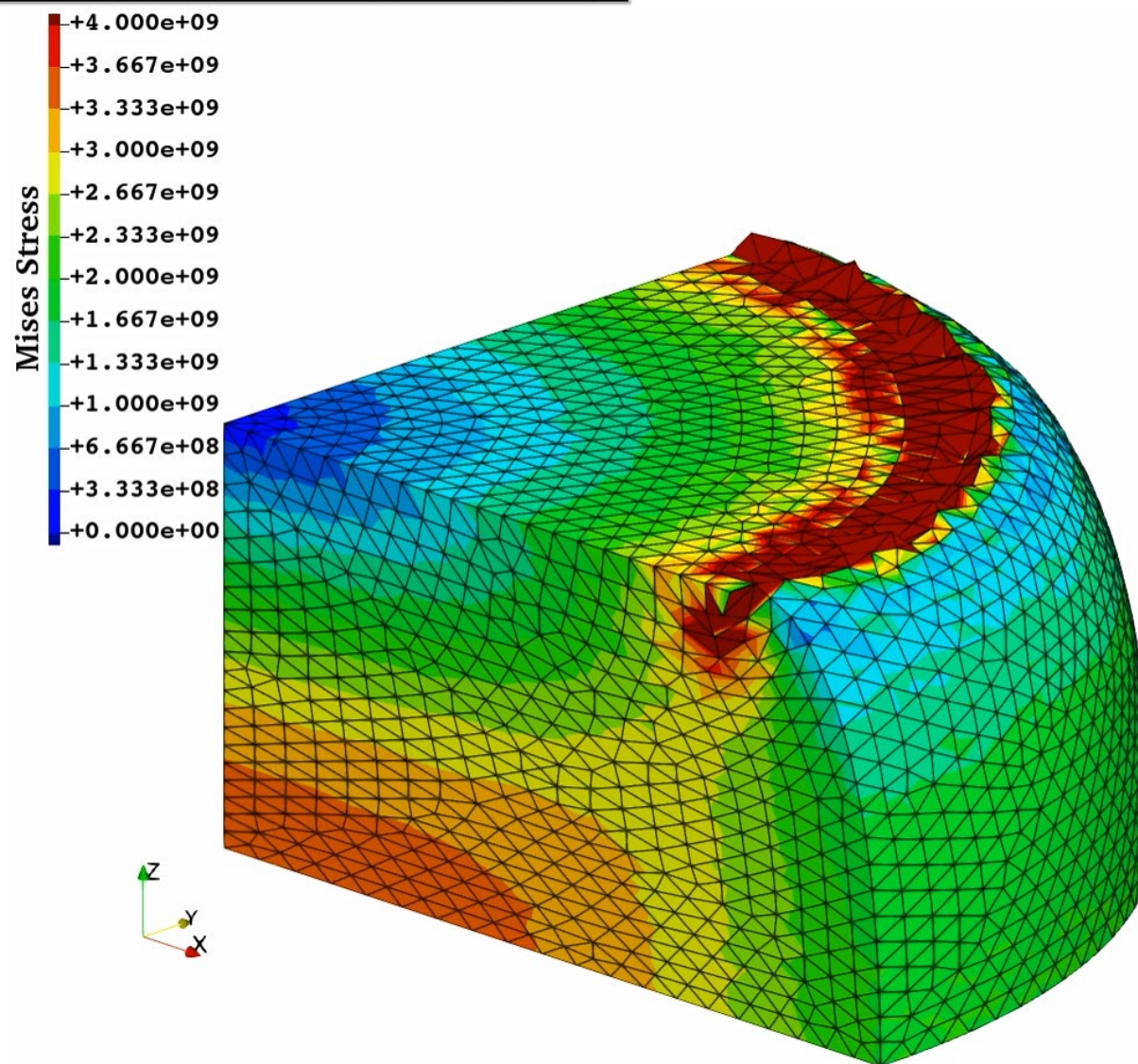
- 改良版の方が明らかに一段階滑らか.
- しかし, 改良版でもチェッカーボーディングを完全に抑え込める訳ではない.

概要



- 上面を面内拘束し軸方向に下向き強制変位.
- Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)

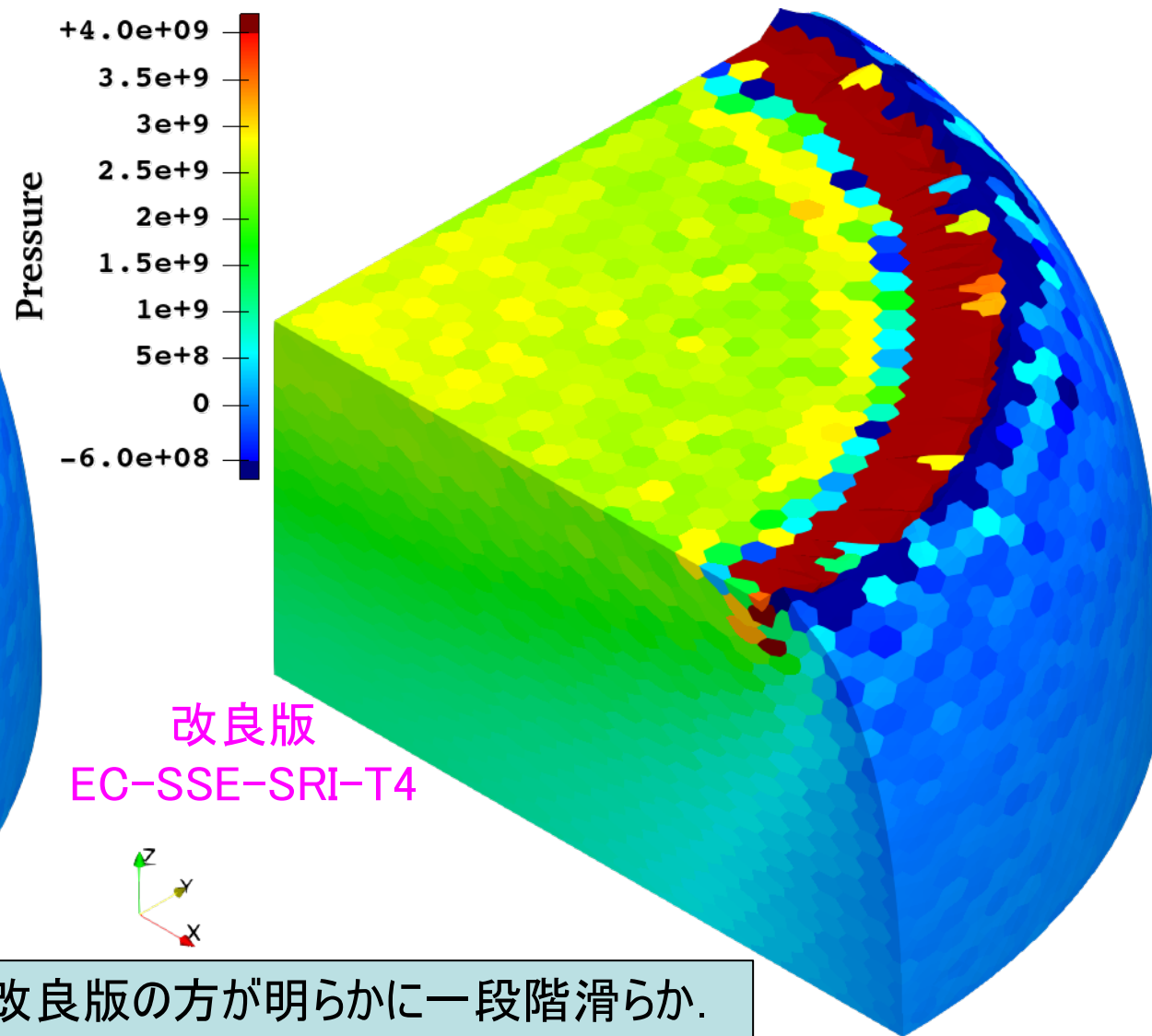
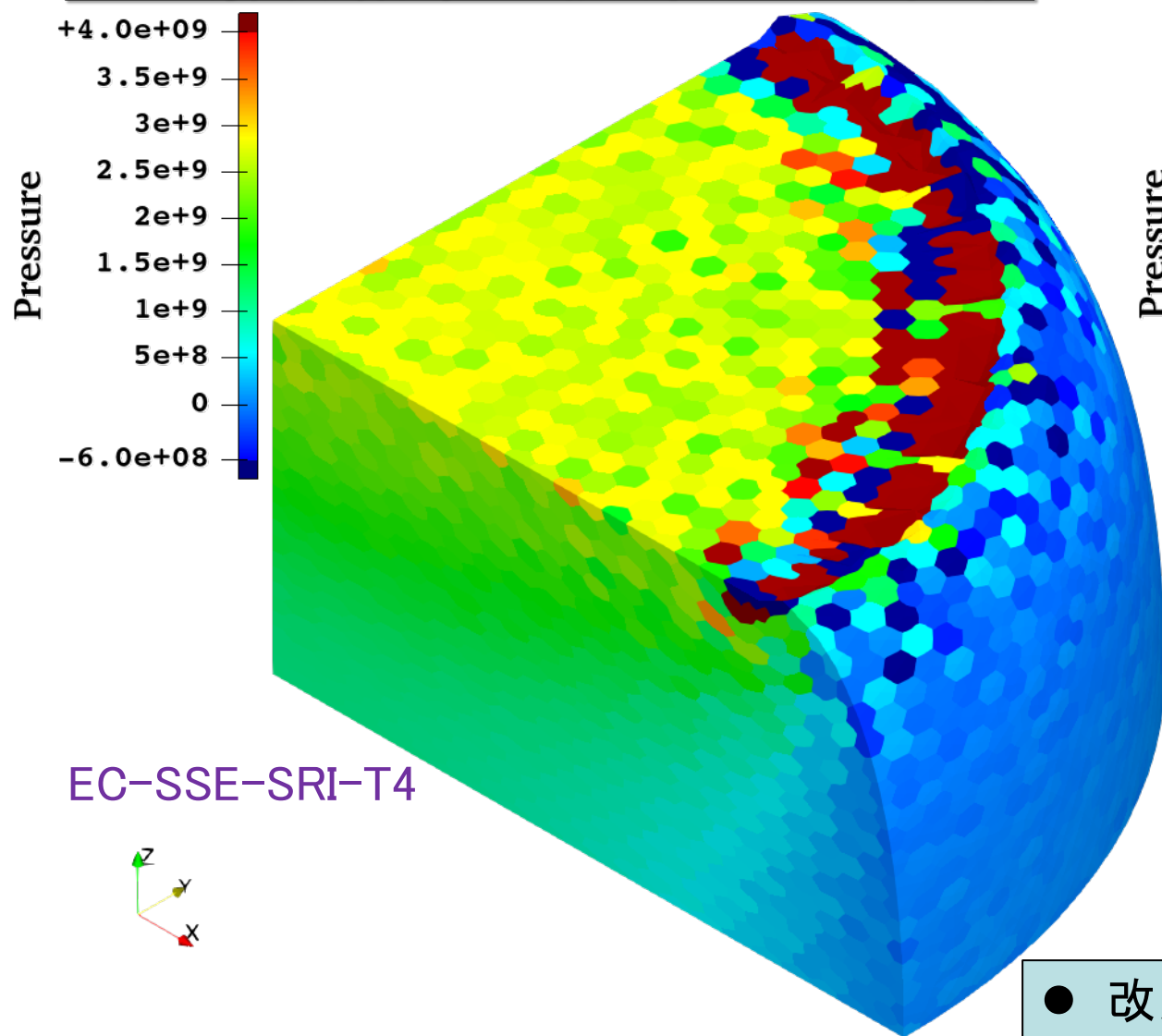
EC-SSE-SRI-T4のMises応力解析結果



37%公称圧縮
で収束困難

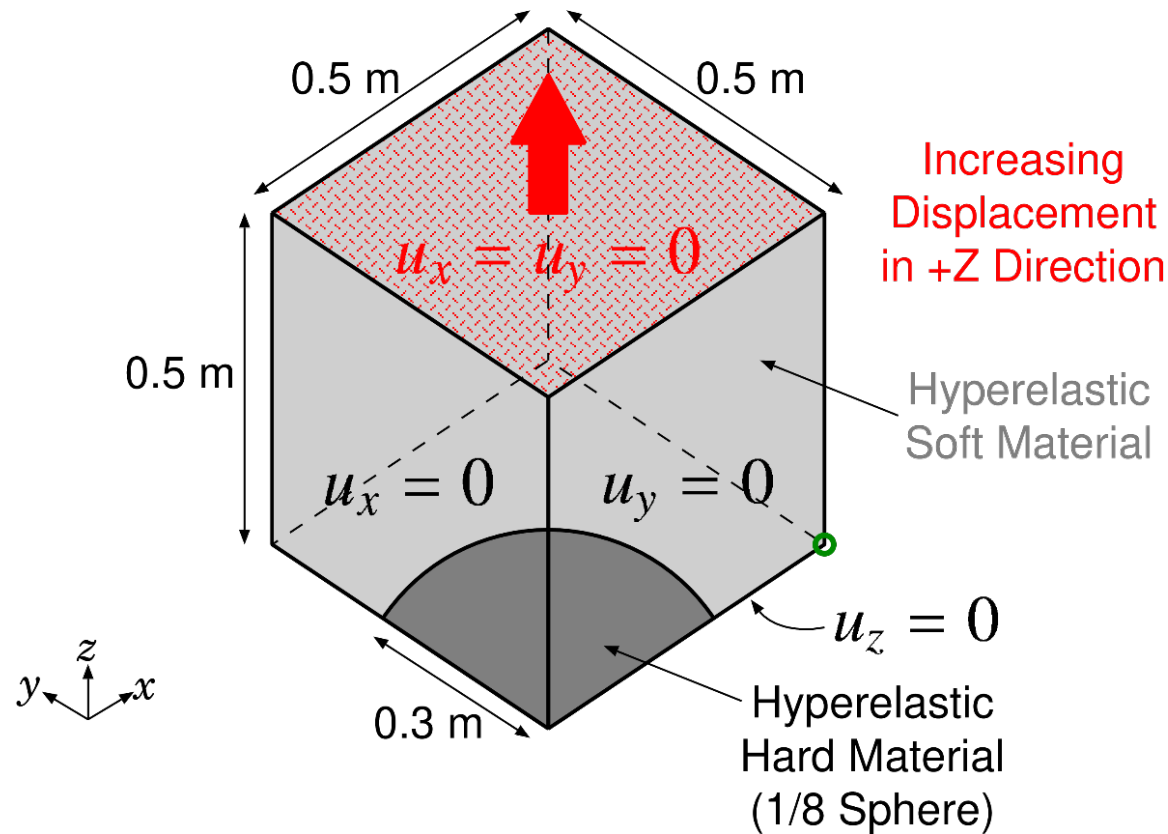
Mises応力分布に問題はなく
大変形ロバスト性も程々

圧力解析結果比較(終盤同時刻)



- 改良版の方が明らかに一段階滑らか.

概要



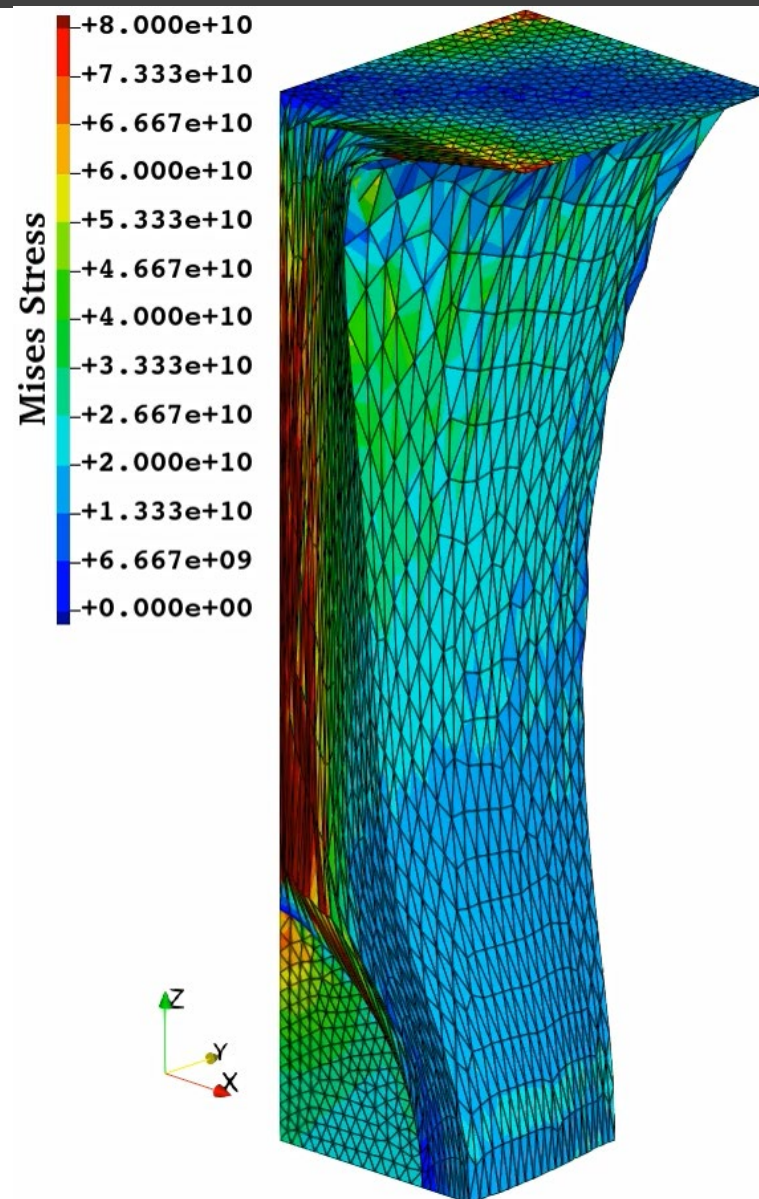
■ 1/8モデル

■ 鉄ファイラー: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 260 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.3$)

■ ゴム: Neo-Hook超弾性体 ($E_{ini} = 6 \text{ GPa}$, $\nu_{ini} = 0.49$)

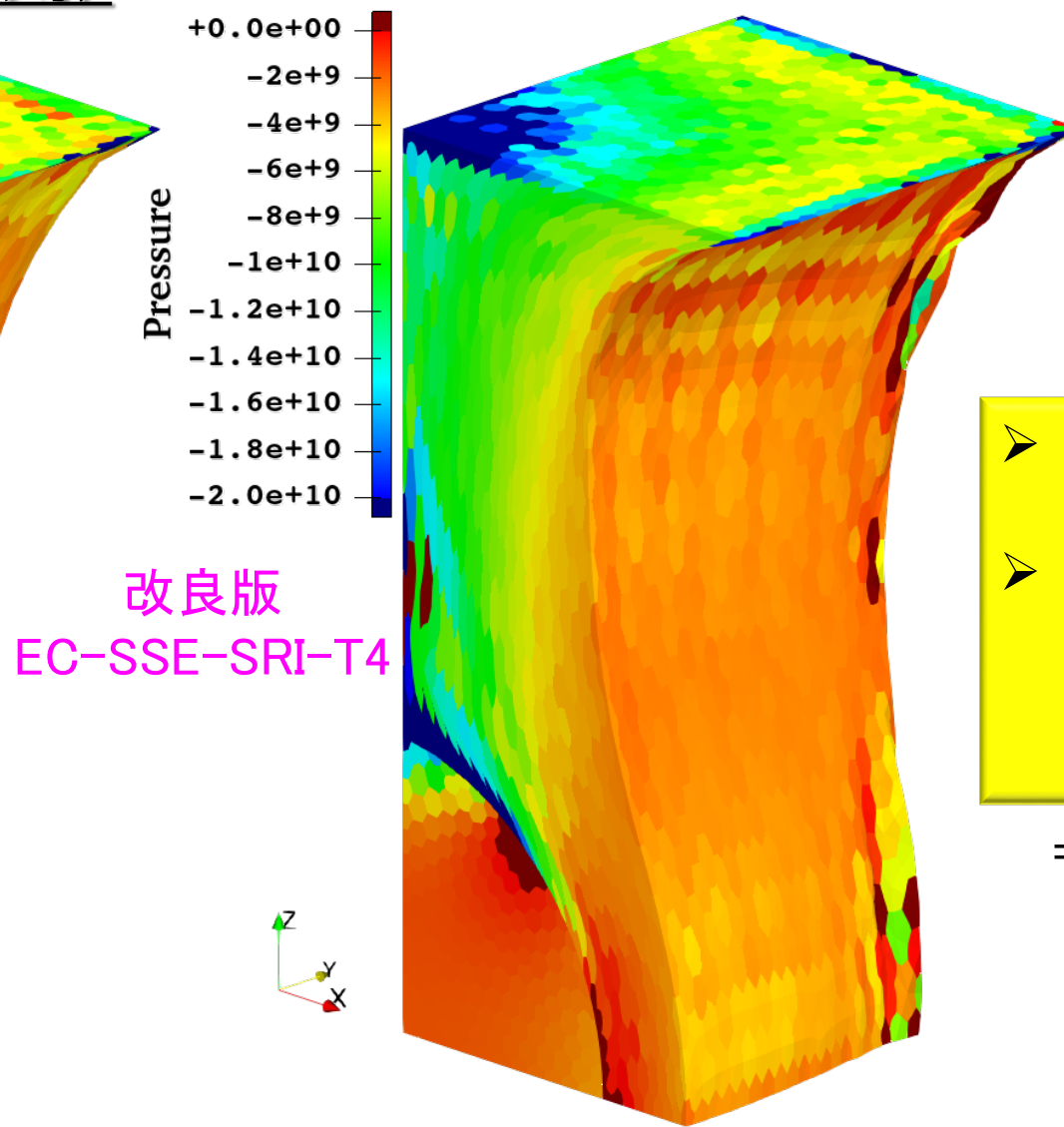
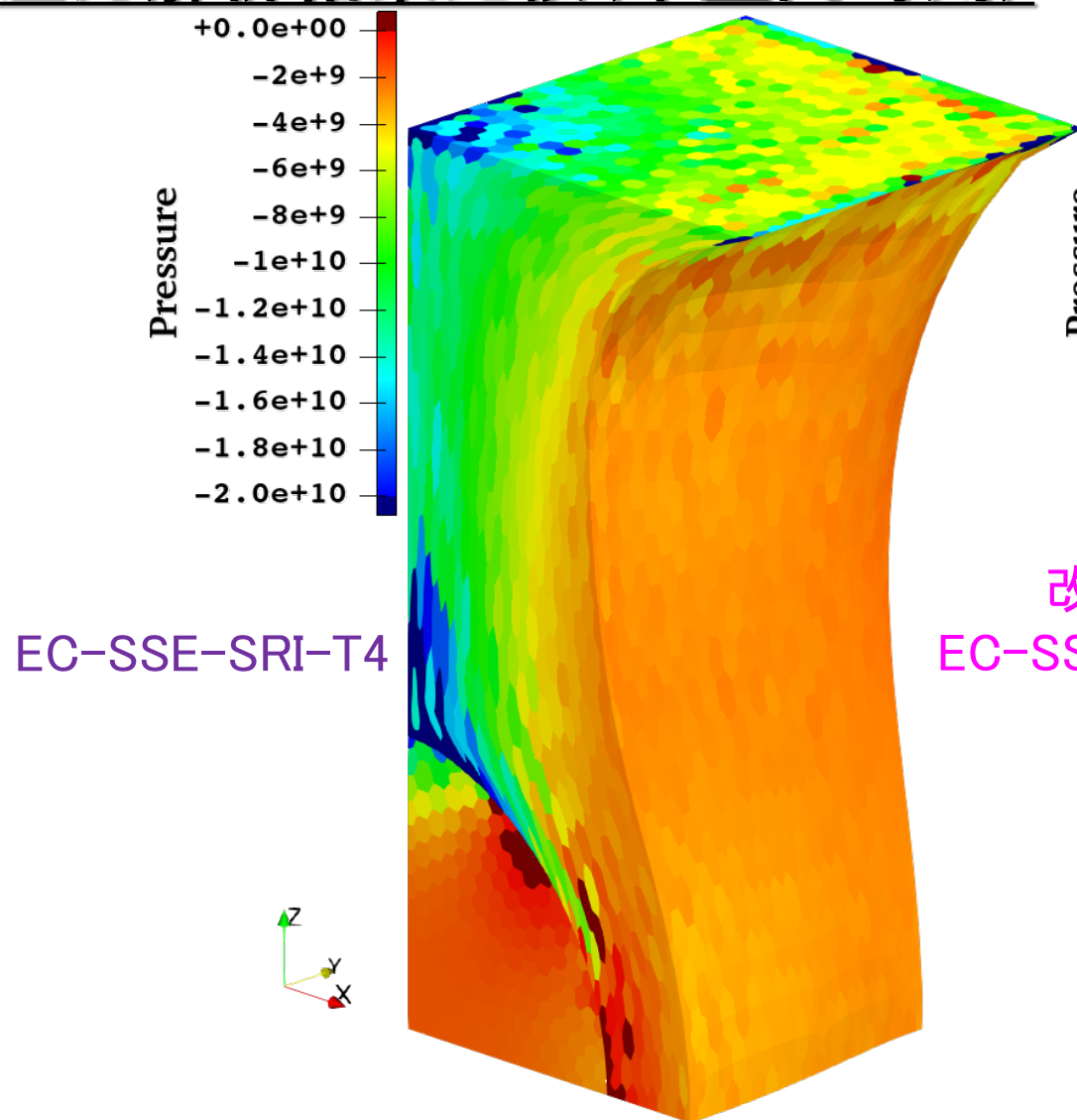
EC-SSE-SRI-T4の Mises応力解析結果

221%公称引張
で収束困難



Mises応力分布に
問題はなく、実用
上十分な大変形口
バスト性がある。

圧力解析結果比較(中盤同時刻)



- 改良版はこの直後に収束困難に陥った.
- 多重平滑化の弊害による引張不安定か疑似低エネルギーモードの疑いあり.

⇒ これでは駄目.

計算時間に関する考察

- 陰解法の計算時間の大部分は剛性方程式を解くことに費やされるため、剛性マトリックス $[K]$ のサイズが計算時間に直結する。
- S-FEMファミリーは純粋な変位型の定式化なので、剛性マトリックス $[K]$ の行数/列数(自由度の数 N)はFEM-T4と全く同じ。
- 要素をまたぐ歪み平滑化を繰り返す毎に剛性マトリックス $[K]$ のバンド幅は広がる。

定式化	$[K]$ のバンド幅	対FEM-T4比
FEM-T4	約14節点×3自由度	1 倍
FEM-T10	約28節点×3自由度	約2倍
ES-FEM-T4	約45節点×3自由度	約3倍
NS-FEM-T4	約60節点×3自由度	約4倍
EC-SSE-T4, EC-SSE-T4-SRI	約94節点×3自由度	約7倍
今回の改良手法	約335節点×3自由度	約24倍

従って、今回の改良手法は

- 同メッシュのFEM-T4の約24倍,
- 同メッシュのEC-SSE-SRI-T4の約3.6倍もの計算時間がかかる...

⇒ これでは駄目.

まとめ

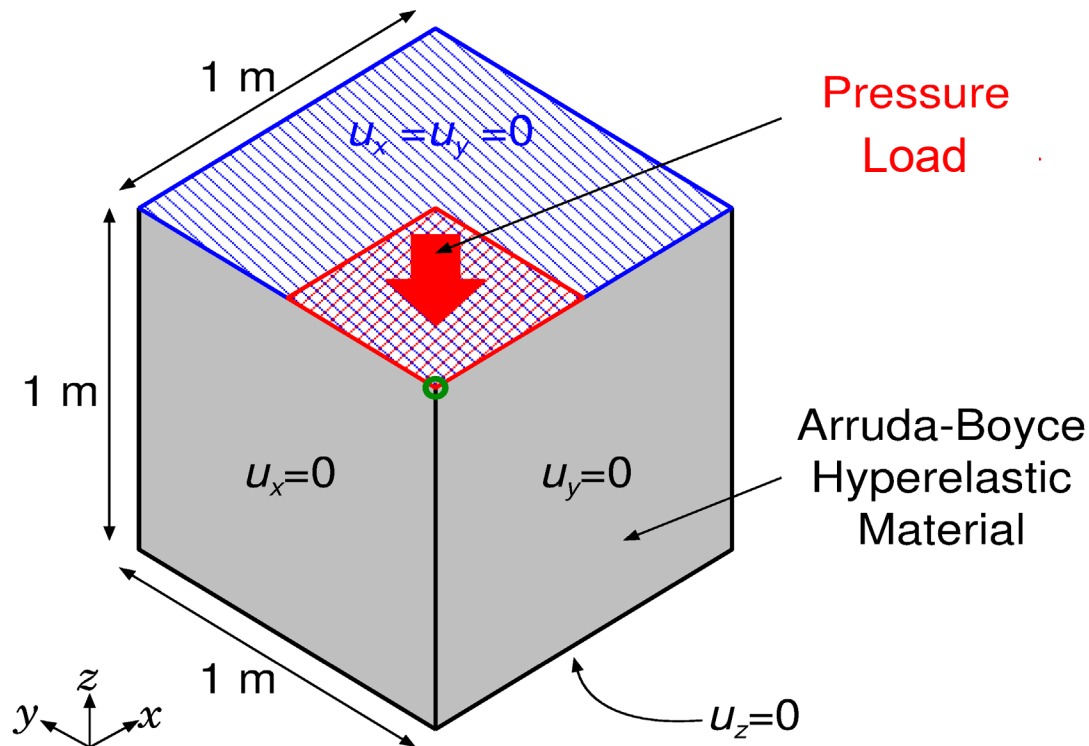
EC-SSE-SRI-T4の圧力チェッカーボーディングまとめ

- ゴム大変形用の次世代平滑化有限要素法である「EC-SSE-SRI-T4」に対し、**圧力チェッカーボーディング**を低減させる手法について検討した.
 - ポアソン比**0.49**の微圧縮問題において、体積成分計算において**節点での平滑化を2回行うことで圧力チェッカーボーディングがより強く抑制されることを確認した.**
 - しかしながら、一部の解析例で強い引張部分に**圧力不安定または疑似低エネルギーモード**が生じ、大変形ロバスト性が低下するケースが見られた.
 - 加えて、改良手法は同メッシュでの**計算時間がFEM-T4の約24倍**に増えるので、残念ながら低コストとは言い難い.
- 圧力チェッカーボーディングを抑えられる低コストな改良案をまだもう少し検討中.
その後実用化に向かう予定.

ご清聴ありがとうございました.

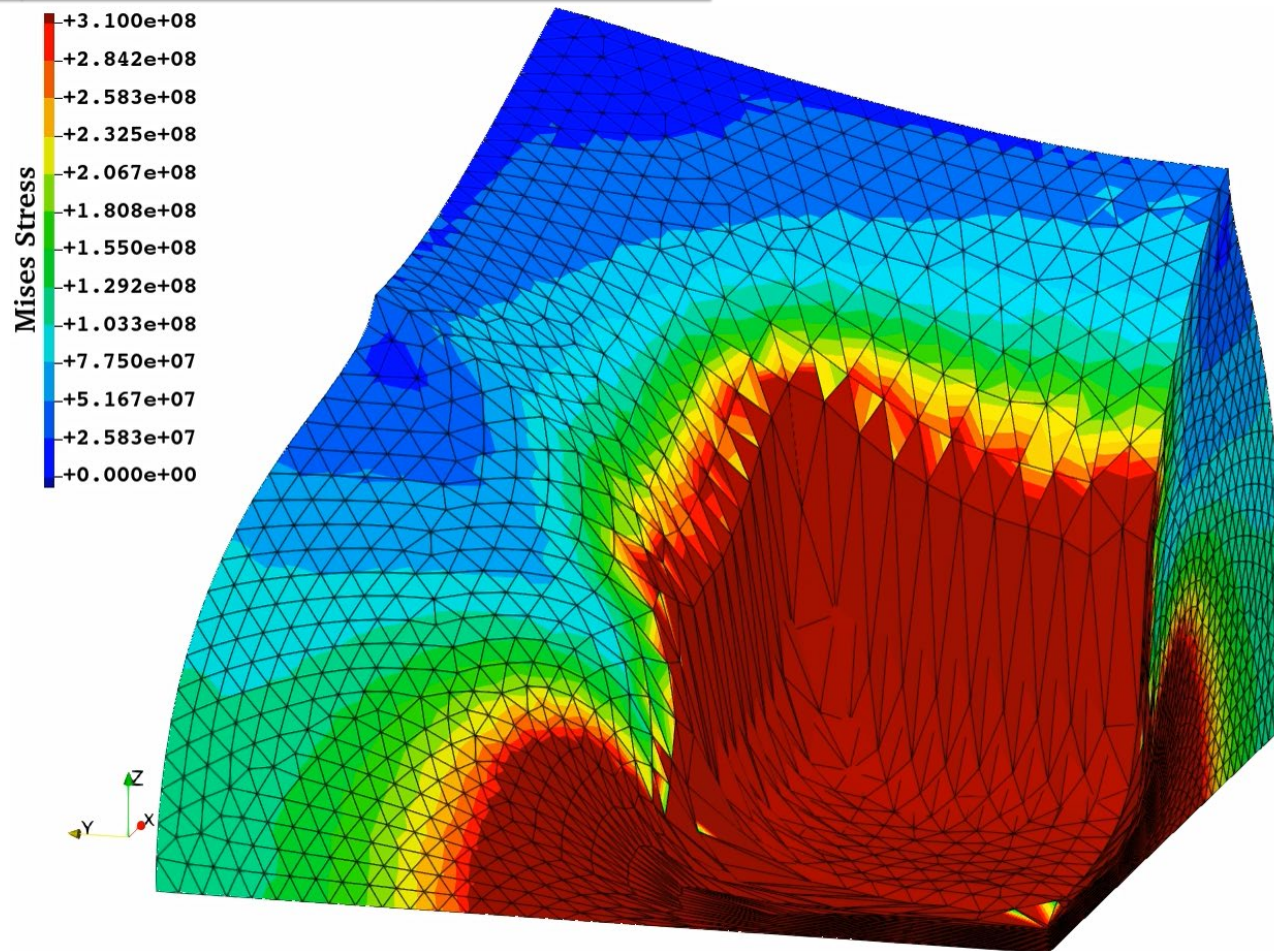
付録

概要



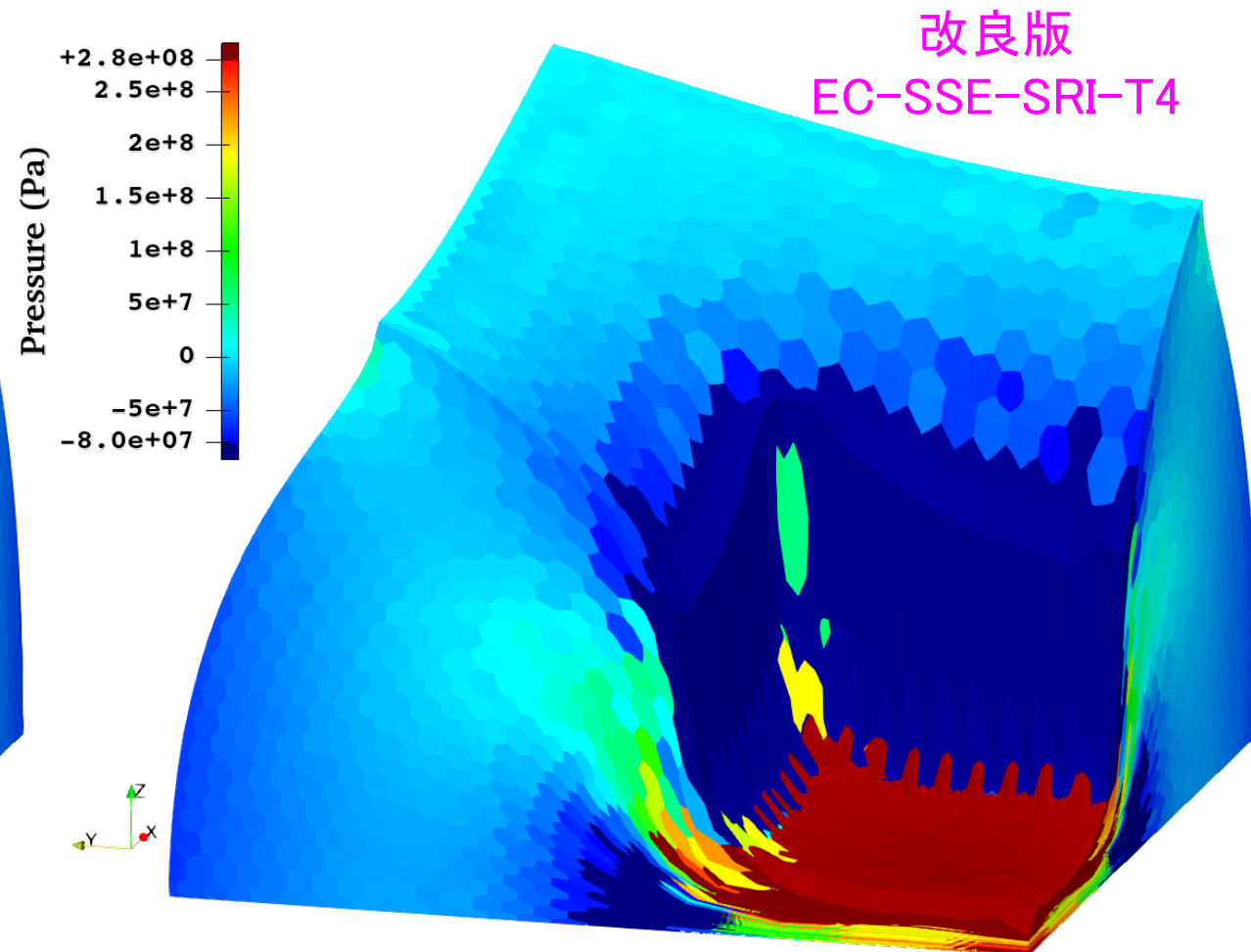
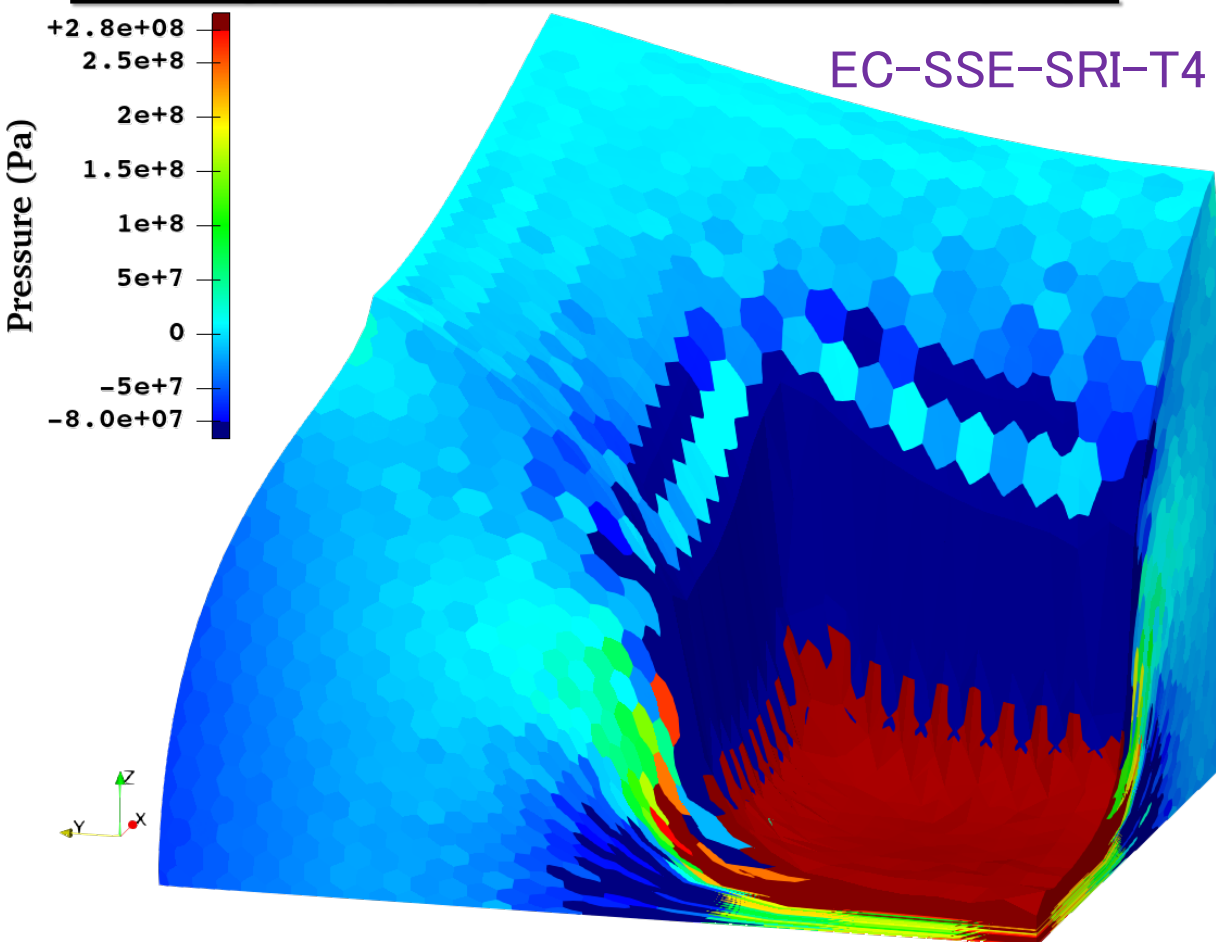
- 1/4モデル.
- Arruda-Boyce超弾性体 ($\nu_{ini} = 0.49$).
- 上面の1/4の領域に圧力を加えて押し込む.

EC-SSE-SRI-T4のMises応力解析結果



Mises応力に大きな問題はなく
大変形ロバスト性も充分.

圧力解析結果比較(終盤同時刻)



改良版の方が全体的には滑らかだが、
最大引張部分にやや不安定性が見られる。