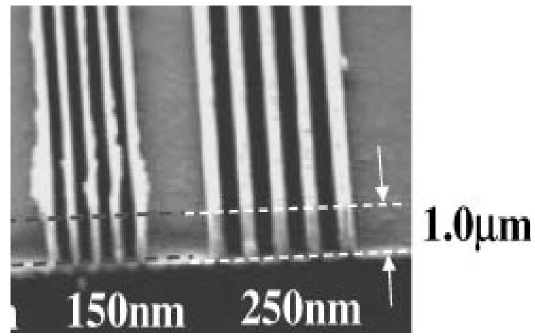
浮動応力点積分による
メッシュフリー大変形解析

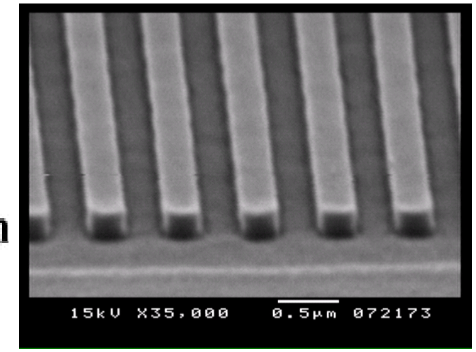
<u>**大西 有希**</u>　　天谷 賢治

東京工業大学

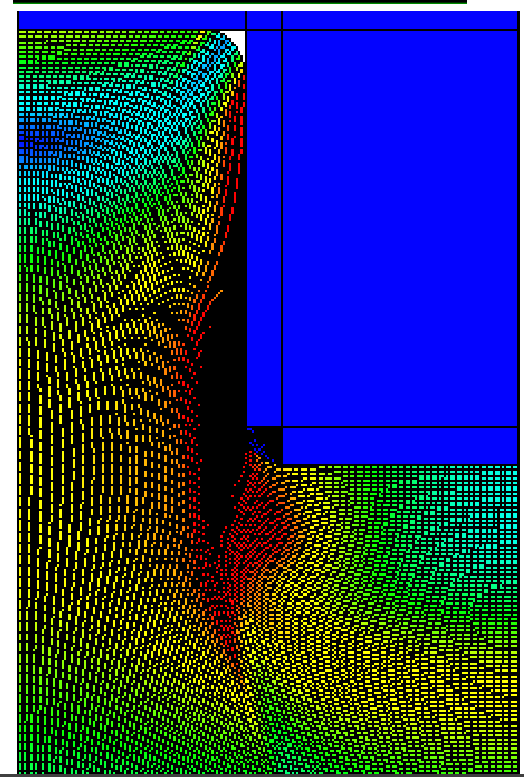
研究背景（モチベーション）

- 柔らかい材料の（超）大変形を「手軽」に解きたい.
  （アプリケーションは
  　熱ナノインプリント,
  　ホットエンボス等）





- 従来はFEMを使用していたが,
  メッシュがすぐに潰れてしまう.
- アダプティブメッシングは「手軽」
  ではない.



メッシュフリーに挑戦！

研究目標

■Galerkin系メッシュフリー法（EFGM系）

■手軽に（超）大変形が扱える
（メッシュやセルを繰り返し生成しない）

■弾性/粘弾性

を満たす解析手法を確立

メッシュフリー領域積分法3種

■バックグラウンドセル積分

- ◆いわゆるオリジナルのEFGM
- ◆Eularメッシュを介するため物理量の輸送が面倒

■節点積分

- ◆SCNIを中心に最近も研究が続いている. (大変形もある)
- ◆ゼロエネルギーモード(FEMのアワーグラスモードと等価)を抑えるための人工安定化項を加える必要がある.
- ◆初期ボロノイセル分割に基づくTotal Lagrange法を採用
- ◆強烈な大変形の取り扱いに難あり.（特に圧縮大変形）

■応力点積分

- ◆あまり研究例が無い.（決まった定式化がまだない.）
- ◆特に大変形に関する研究例は少ない.

提案する応力点積分手法の概要

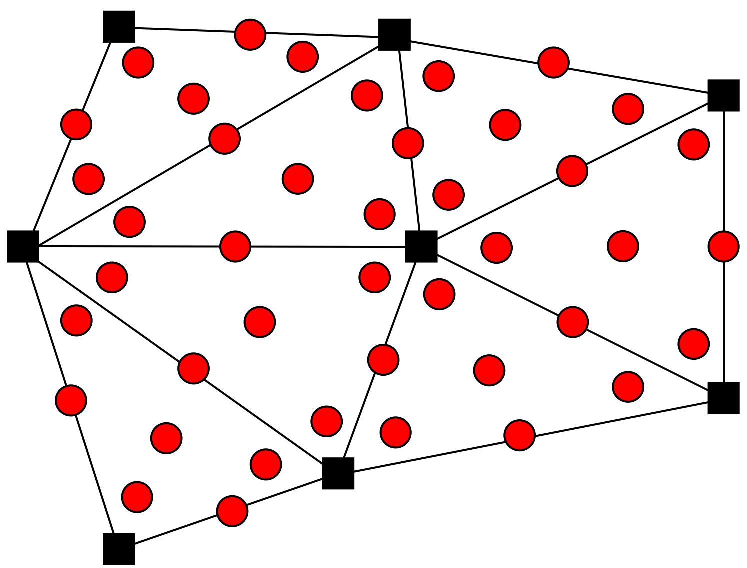
- 浮動応力点積分（大した意味はありません．）
  - 初期状態に対してのみ三角形/四面体メッシュ分割
  - 節点の他に応力点を生成
  - 領域積分は生成した応力点で行う
  - Update Lagrange法
（手のつなぎ方が時々刻々変わる）
  - 準陰的時間発展

- １年前との違い
  - 積分補正を行い，パッチテストを通過する定式化に変更
- ４か月前との違い
  - 増分型の釣合い方程式に変更（仮想外力の使用を止めた）
＜予稿の内容とも異なっております＞

定式化(初期設定)

- 初期形状に対して有限要素分割を行う.
  (3角形，4面体要素分割を想定)
- 節点はそのまま利用.
- 応力点を全ての辺の中心および要素内に生成.

  (Belytschkoの応力点積分と違い，master/slaveの区別は無い.)
- 応力点の担当体積は初期メッシュから計算.



■ : 節点
($\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ のみ保持)
● : 応力点
($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}^{v}$等々を保持)

定式化（準陰的時間発展）

標準的な
陰的時間発展
アルゴリズム

■時間増分計算ループ開始

- ●（準）Newton法ループ開始
  - ◆サポート・形状関数・補正係数の更新
  - ◆内力増分$\boldsymbol{\delta f}^{\text{int.}}$と接線剛性$\boldsymbol{K}$の計算
  - ◆残差 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\delta f}^{\text{ext.}} - \boldsymbol{\delta f}^{\text{int.}}$の計算
  - ◆$\boldsymbol{K}\,\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}$を解く
  - ◆節点・応力点の試行位置の更新
- ●（準）Newton法ループ終了
- ●各種物理量の更新

■時間増分計算ループ終了

定式化(準陰的時間発展)

■時間増分計算ループ開始

- ●サポート・形状関数・補正係数の更新
- ●(準)Newton法ループ開始
  - ◆サポート・形状関数・補正係数の更新
  - ◆内力増分$\boldsymbol{\delta f}^{\,int.}$と接線剛性$\boldsymbol{K}$の計算
  - ◆残差 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\delta f}^{\,ext.} - \boldsymbol{\delta f}^{\,int.}$の計算
  - ◆$\boldsymbol{K}\,\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}$を解く
  - ◆節点・応力点の試行位置の更新
- ●(準)Newton法ループ終了
- ●各種物理量の更新

■時間増分計算ループ終了

提案手法の
準陰的時間発展
アルゴリズム

形状関数が
各時間増分中
一定
(形状関数は陽的
に決定する.)

定式化(MLS近似)

■重み関数

$$ {}^I w_J = \begin{cases} 1/{}^I d_J - 1 & (0 < {}^I d_J < 1) \\ 0 & (1 \le {}^I d_J) \end{cases} , \quad {}^I d_J = \frac{\| {}_J\boldsymbol{x} - {}^I\boldsymbol{x} \|}{{}^I R} $$

ベル形状ではない.

■サポート半径

set initial ${}^I R$ (small)

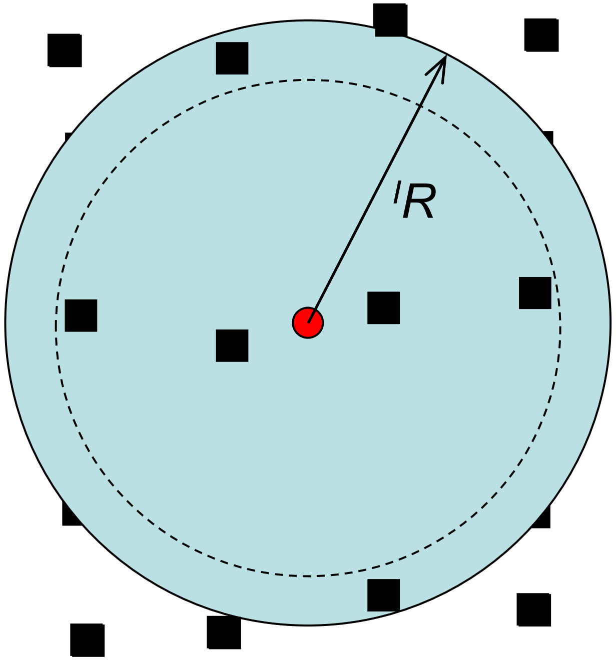
begin loop $\quad \boldsymbol{p} = \{1, x, y\}^T$

$\quad$ calculate $\boldsymbol{A} (= \sum_{J \in \mathbb{S}} {}^I w_J \, {}_J\boldsymbol{p}^T \, {}_J\boldsymbol{p})$

$\quad \boxed{\text{if } \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) < 1 \times 10^5, \text{break}}$

$\quad {}^I R \longleftarrow 1.01 \times {}^I R$

end loop



定式化(積分補正)

■ Divergence-free条件(Integration Constraint)

各節点Jに対し，次式で表される.

$$\sum_{I \in {}_J\mathbb{S}} {}^I\psi_J {}^IV = \mathbf{0} \qquad \text{(for } J \text{ in interior nodes),}$$

$$\sum_{I \in {}_J\mathbb{S}} {}^I\psi_J {}^IV = {}_J\boldsymbol{n}_J A \qquad \text{(for } J \text{ in exterior nodes).}$$

ψ: 形状関数の空間微分 $\nabla\phi$（FEMで言うBマトリックス）
$\boldsymbol{n}$: 外向き単位法線ベクトル, A: 輪郭節点の担当面積
${}_J S$: 節点Jをサポート内に含む応力点の集合

パッチテスト通過(応力一様状態を正しく表現する)
のための必要十分条件

上式を満たすように ψ を補正する.

定式化(積分補正)

■積分補正(Integration Correction)

各応力点の${}^I\psi$を補正係数${}^I\gamma$を用いて補正する.

$$ {}^I\tilde{\boldsymbol{\psi}} = (1 + {}^I\gamma){}^I\boldsymbol{\psi} $$

${}^I\psi$を先述のDivergence-free条件式に代入

⇩

${}^I\gamma$を未知ベクトルとする連立一次方程式

「節点数＜応力点数」なので劣決定問題

（今のところ最小ノルム解を使用. . . ）

なおこの時, Partition of Unityは次式の通り保たれている.

$$ \sum_{J\in {}^I\mathbb{S}} {}^I\psi_J = 0 \Longrightarrow \sum_{J\in {}^I\mathbb{S}} {}^I\tilde{\psi}_J = \sum_{J\in {}^I\mathbb{S}} (1 + {}^I\gamma){}^I\psi_J = (1 + {}^I\gamma) \sum_{J\in {}^I\mathbb{S}} {}^I\psi_J = 0 $$

定式化(更新式)

■応力点I の位置 ${}^{I}x$ の更新式

$$ {}^{I}\boldsymbol{x}^{\mathrm{trial}} \longleftarrow {}^{I}\boldsymbol{x} + \sum_{J \in {}^{I}\mathbb{S}} {}^{I}\phi_J \left({}_J\boldsymbol{x}^{\mathrm{trial}} - {}_J\boldsymbol{x} \right) $$

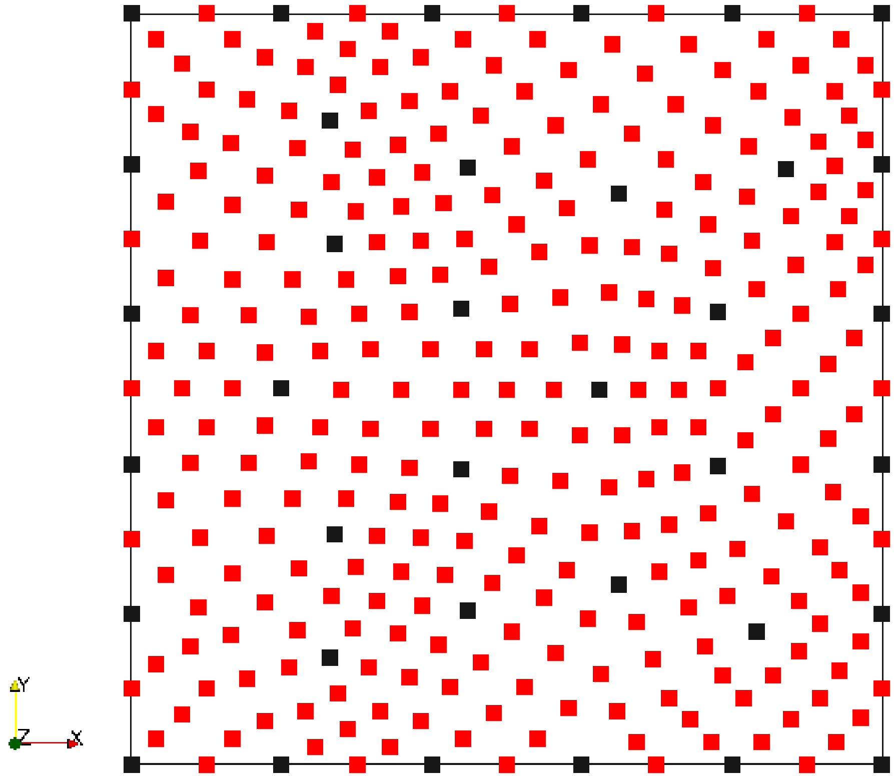
$\boldsymbol{x}$: 現在位置, S: サポート内節点集合, ϕ: 形状関数

■応力点I の担当体積 ${}^{I}V$の更新式

$$ {}^{I}V^{\mathrm{trial}} \longleftarrow {}^{I}V^{\mathrm{initial}} \det({}^{I}\boldsymbol{F}^{\mathrm{trial}}) $$

V^{initial}: 初期担当体積, $\boldsymbol{F}$: 変形勾配テンソル

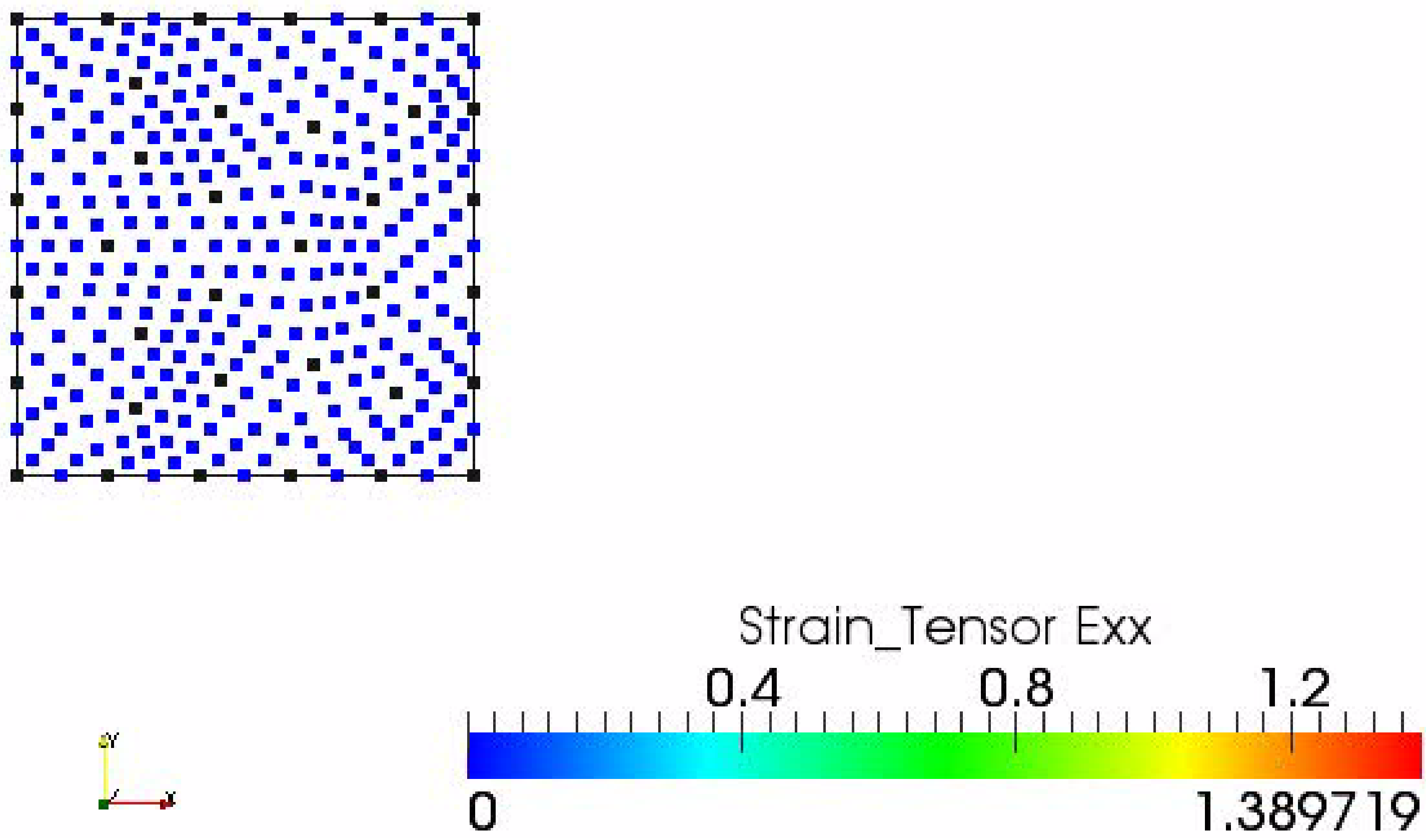
大変形パッチテスト



E =1GPa
ν =0.49

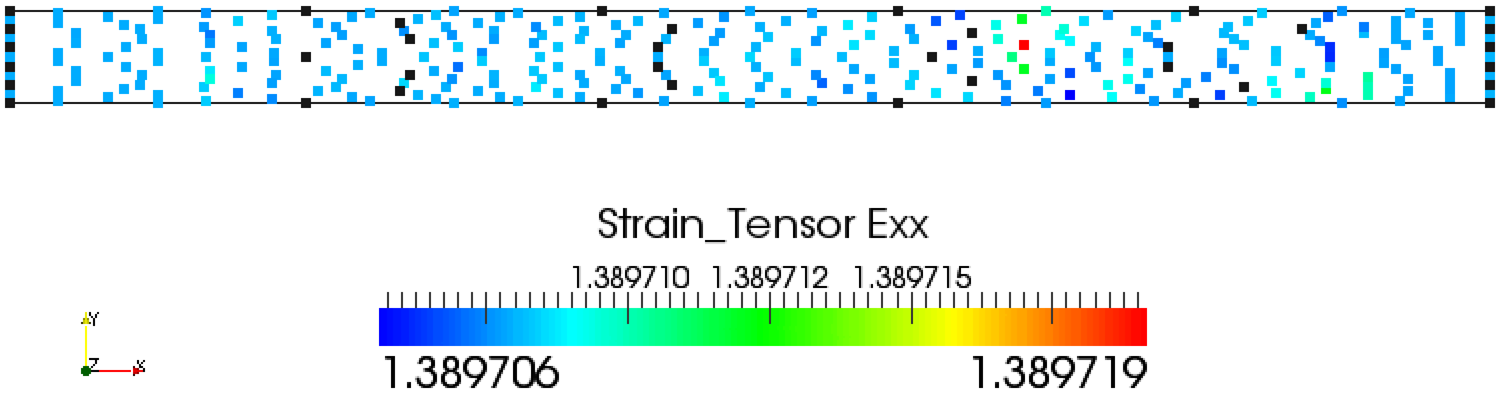
- ■ 弾性体, 静的, 平面歪み, 1m x 1mの正方形領域
- ■ 節点と応力点を不規則に配置
- ■ 全外周節点に強制変位境界条件

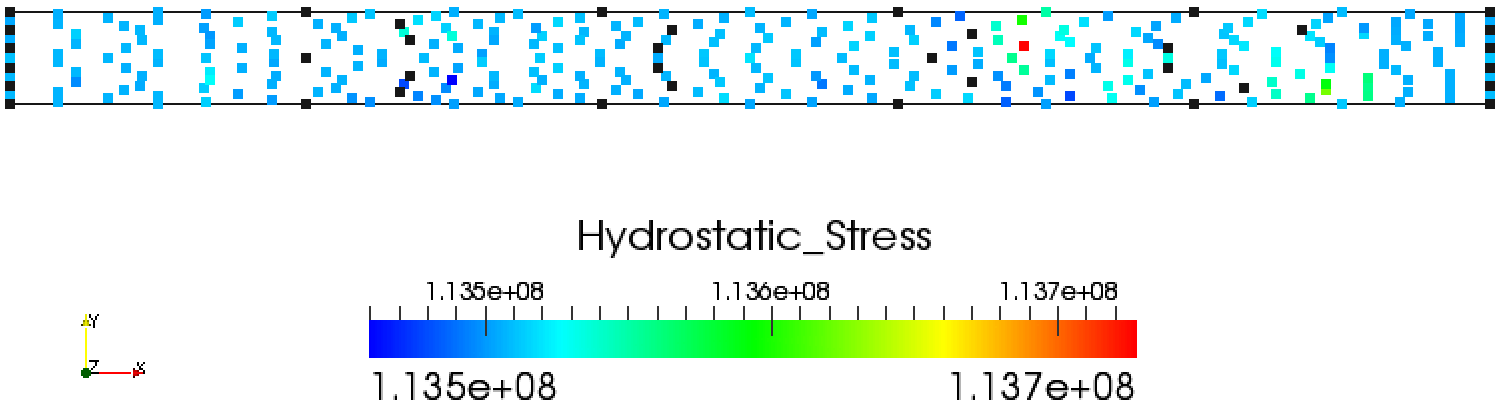
大変形パッチテスト1



■横に4倍，縦に1/4倍

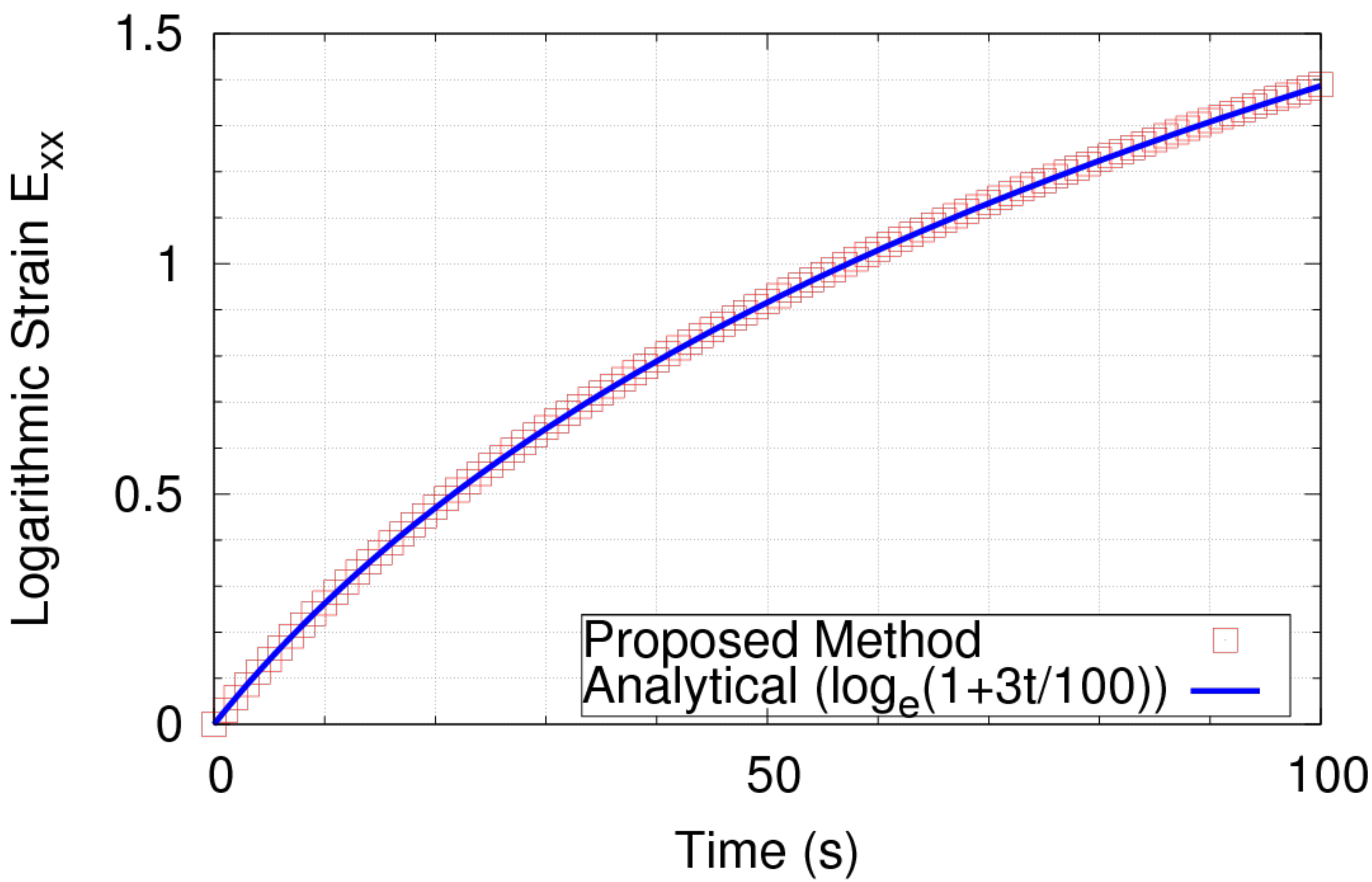
大変形パッチテスト1





■最終状態でExxの解析解は$\log_e(4)=1.3863\cdots$

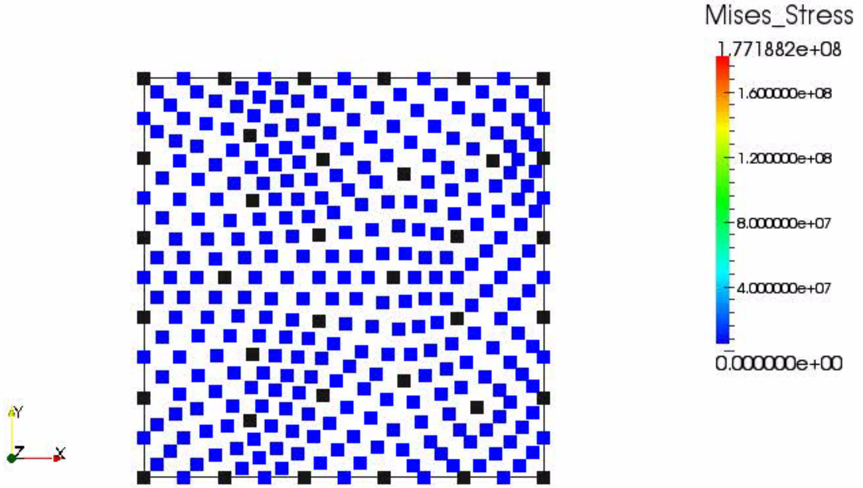
大変形パッチテスト1(誤差評価)



■100ステップ時間分割で誤差が0.3%以内

■相当な大変形でもパッチテストを通過

大変形パッチテスト2

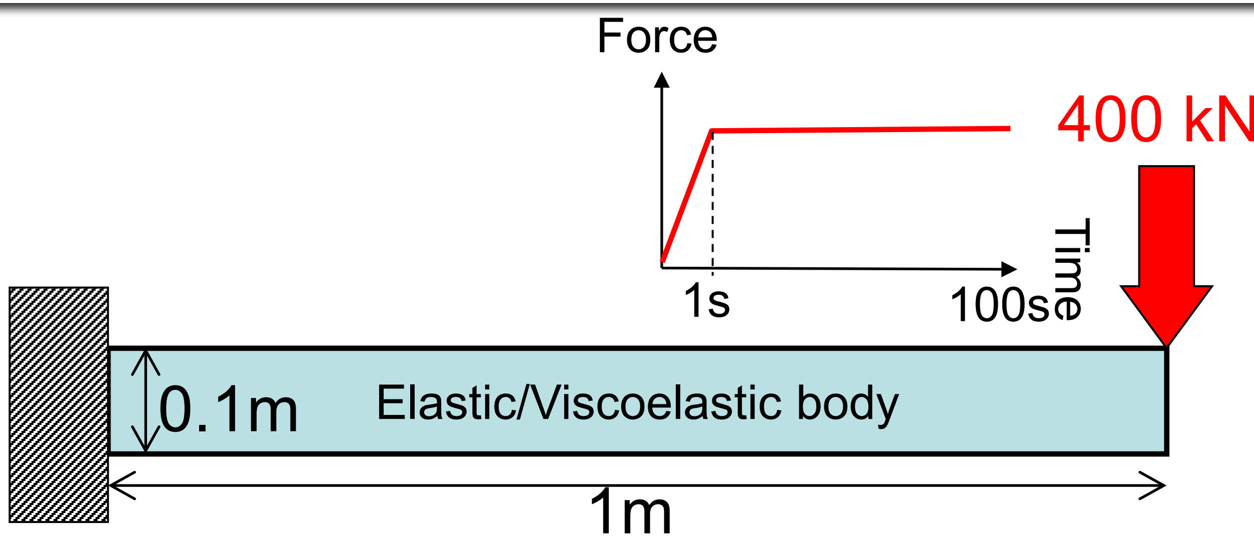


E =1GPa
ν =0.49

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} 0.1 + 0.2x_1 - 0.1x_2 \\ 0.2 - 0.1x_1 + 0.2x_2 \end{Bmatrix}$$

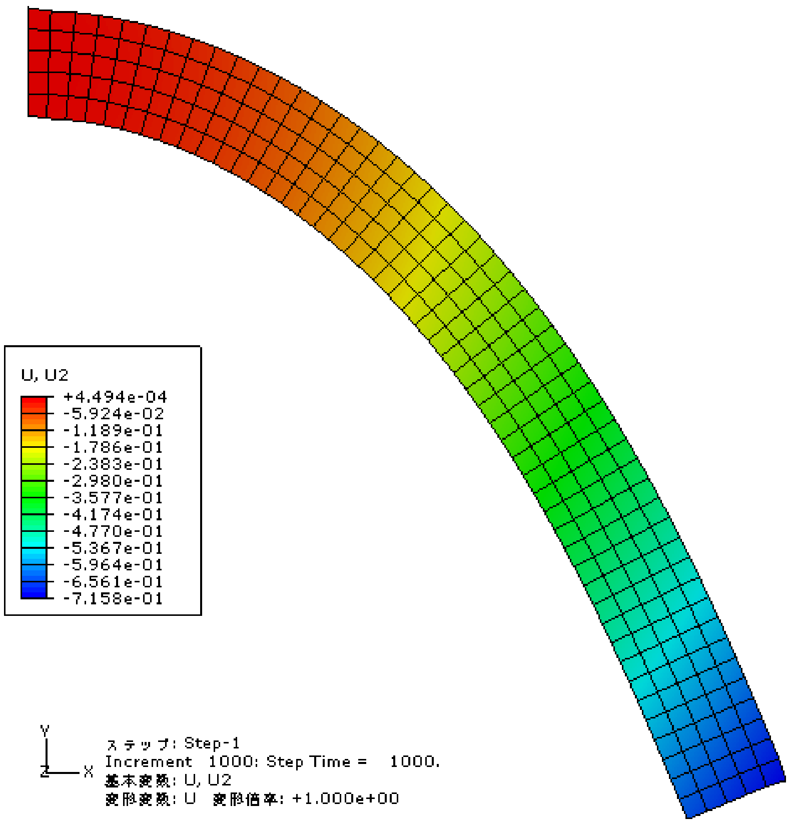
- ■ABAQUS/Standardの詳細解析の数値解と比較
- ■100ステップ時間分割でMises応力，静水圧応力などの誤差が0.2%以内
- ■本手法の大変形パッチテスト通過を確認

片持ち梁の曲げ

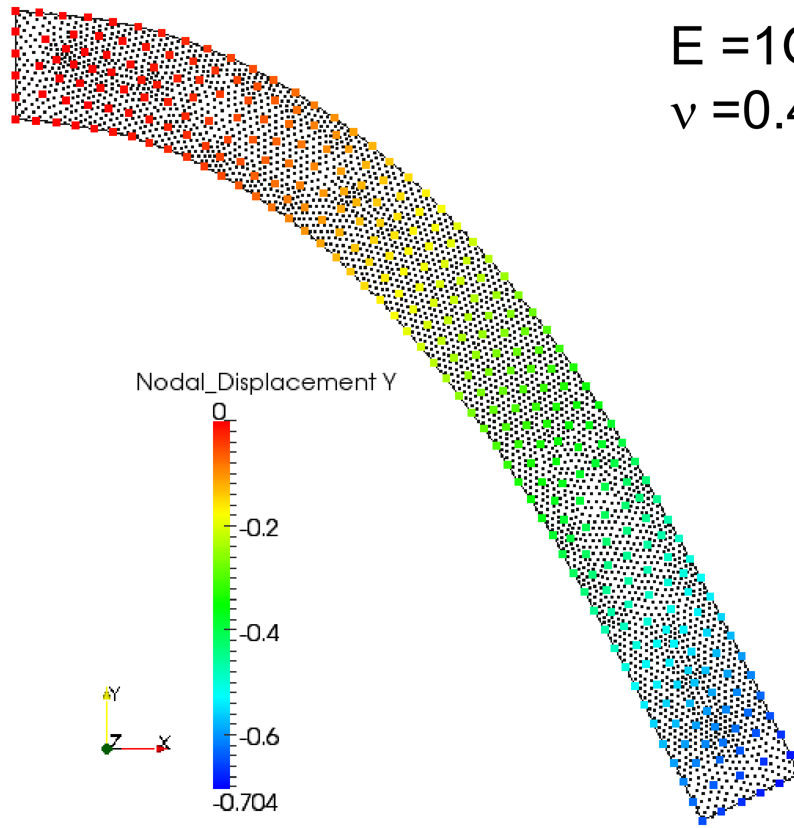


- 静的/準静的, 平面歪み
- 先端角の節点に一点集中荷重
- 100ステップに時間分割
- ABAQUS/Standard(同一節点配置の4角形選択的低減積分要素) 解析結果との比較

片持ち梁の曲げ(弾性)



ABAQUS/Standard



Proposed Method

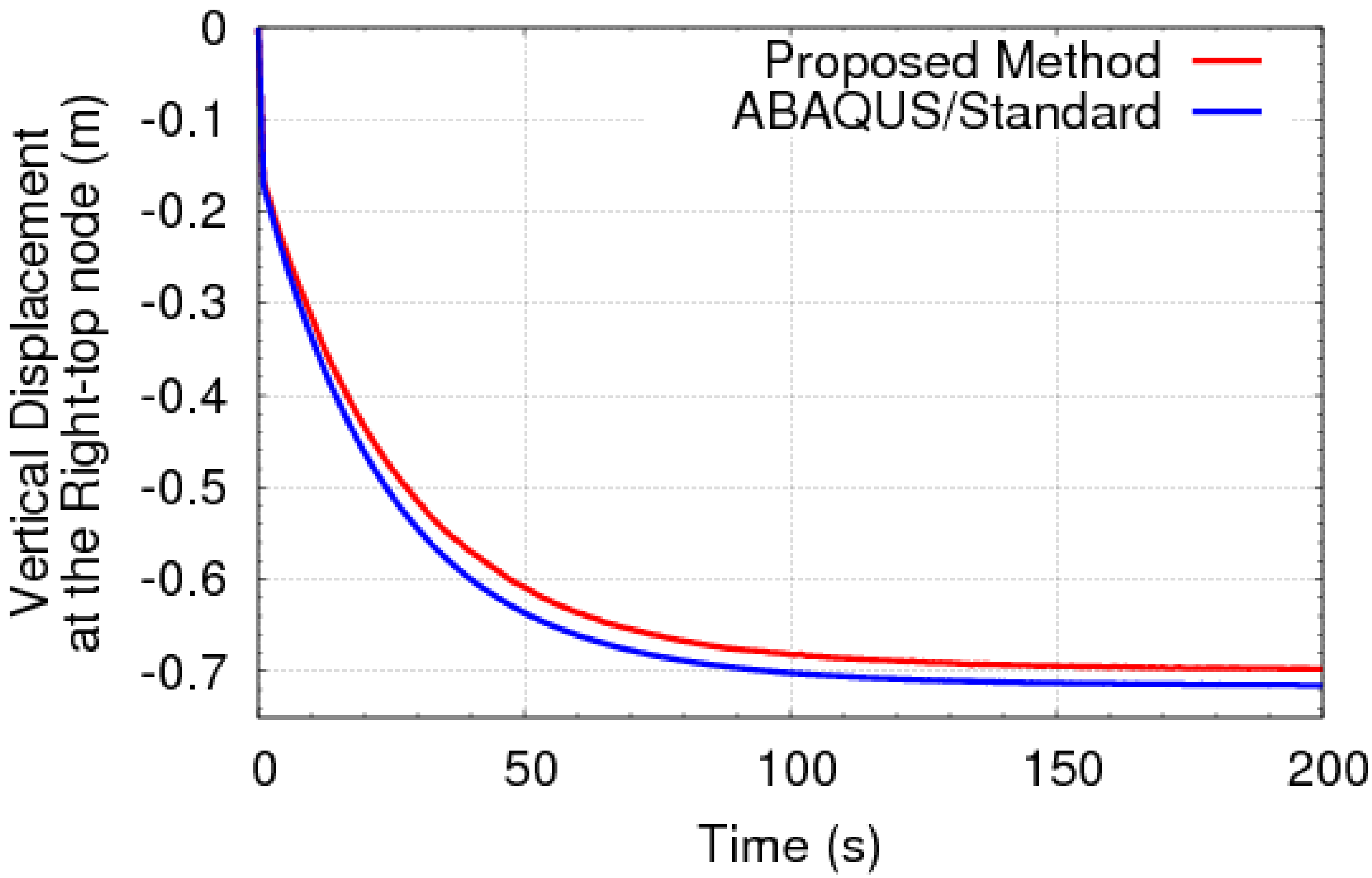
E =1GPa

ν =0.481

■ 100ステップ時間分割で変位誤差 1% 以内

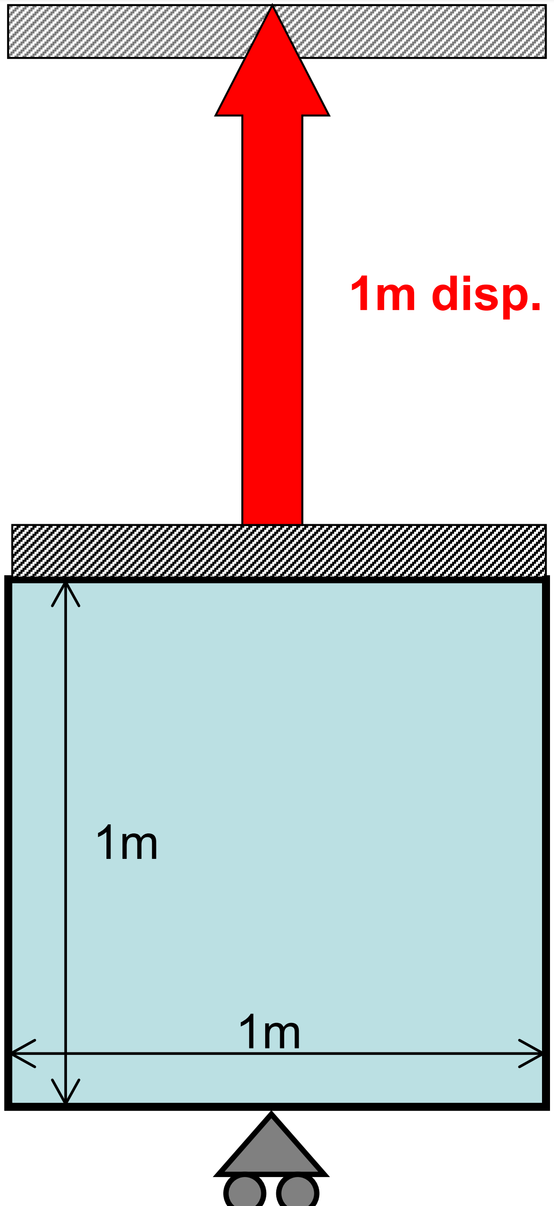
■ 弾性大たわみ問題での充分な解析精度を確認

片持ち梁の曲げ(粘弾性)



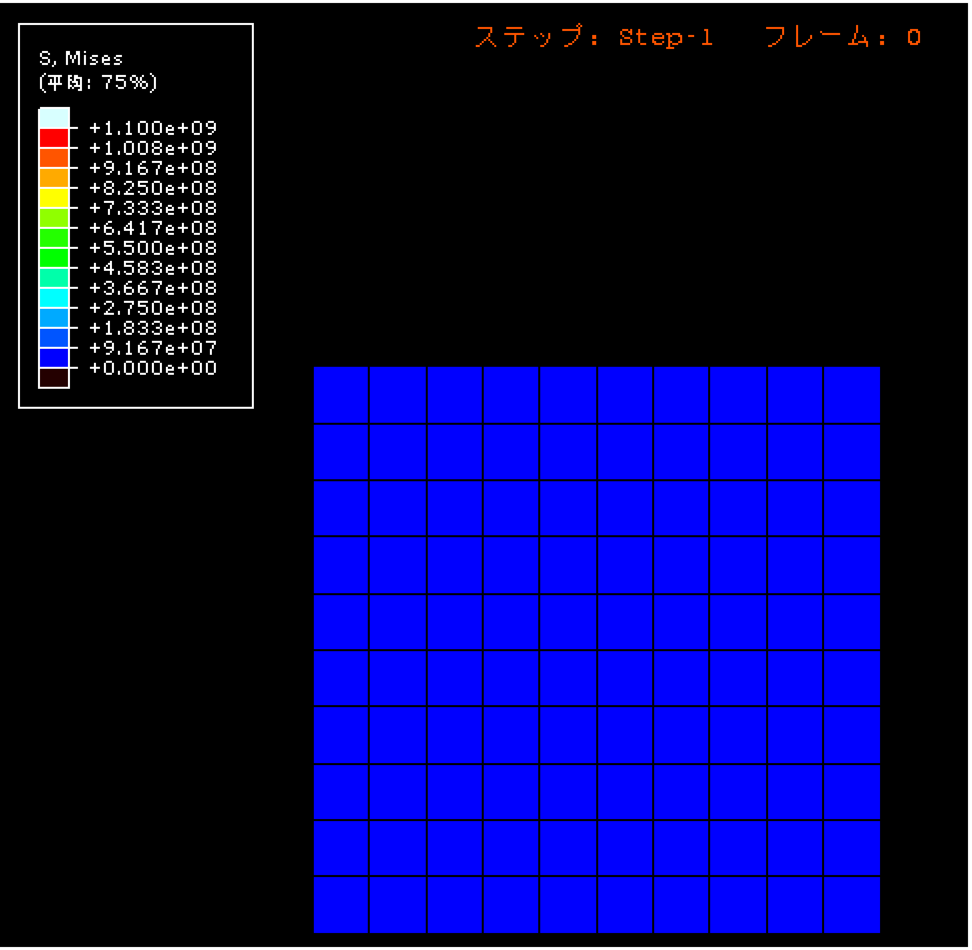
■ 変位誤差 2.5% （原因を調査中）

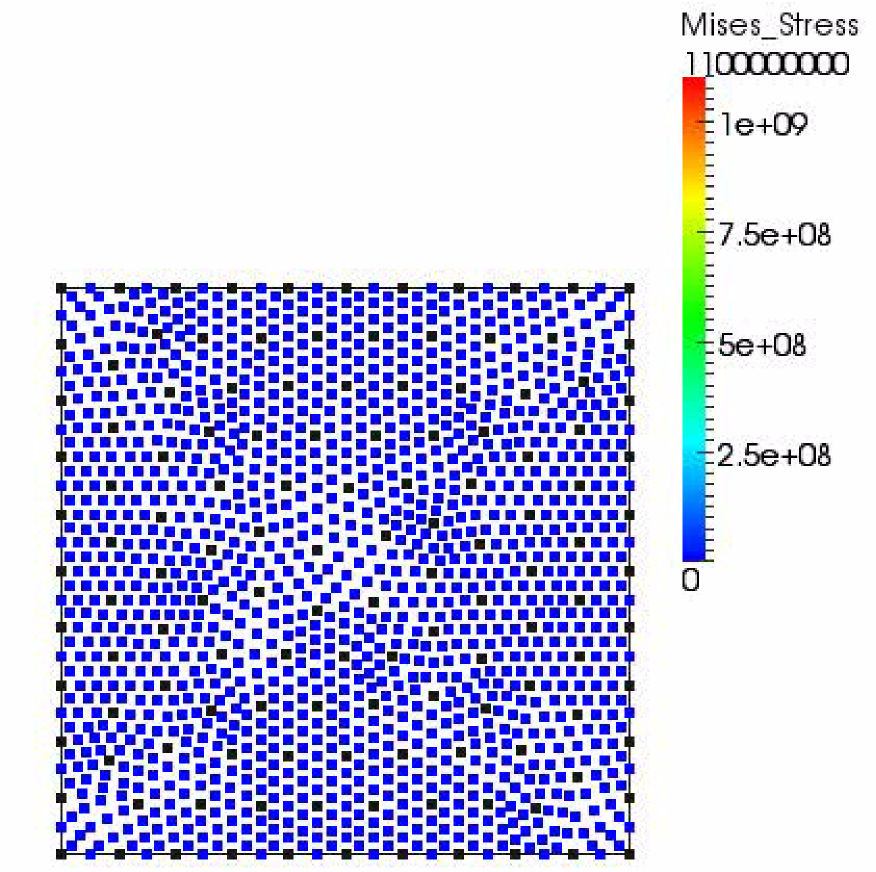
単軸引張解析(概要)



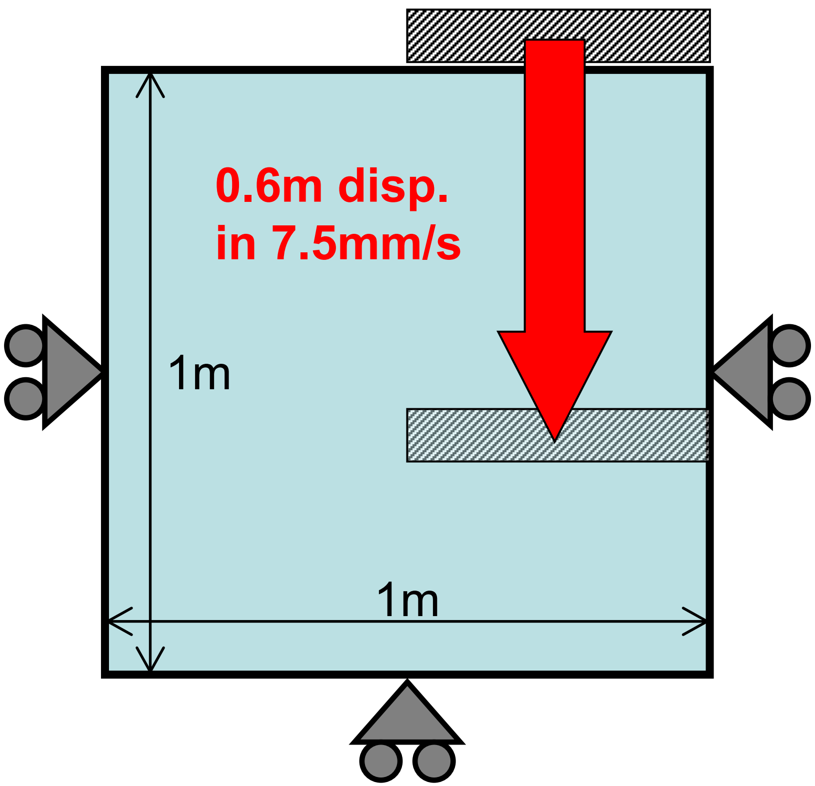
- 弾性(E=1GPa,ν=0.49)
- 静的, 平面歪み
- 下辺を上下拘束
- 上辺を左右拘束＋上方向に強制変位

単軸引張解析(結果)


S, Mises
(平均: 75%)
+1.100e+09
+1.008e+09
+9.167e+08
+8.250e+08
+7.333e+08
+6.417e+08
+5.500e+08
+4.583e+08
+3.667e+08
+2.750e+08
+1.833e+08
+9.167e+07
+0.000e+00
ステップ: Step-1　フレーム: 0

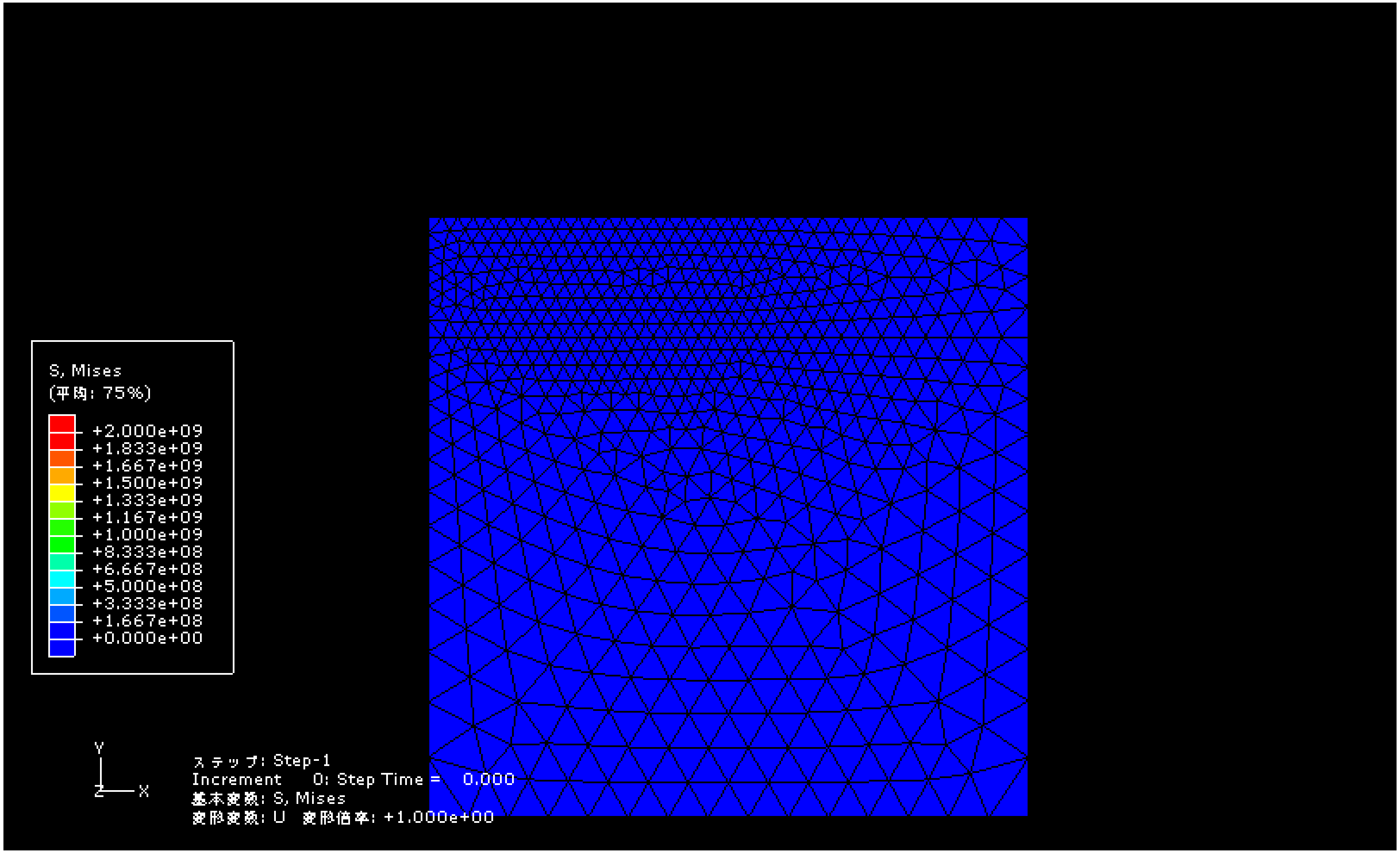

Mises_Stress
1100000000
1e+09
7.5e+08
5e+08
2.5e+08
0

押込解析(概要)



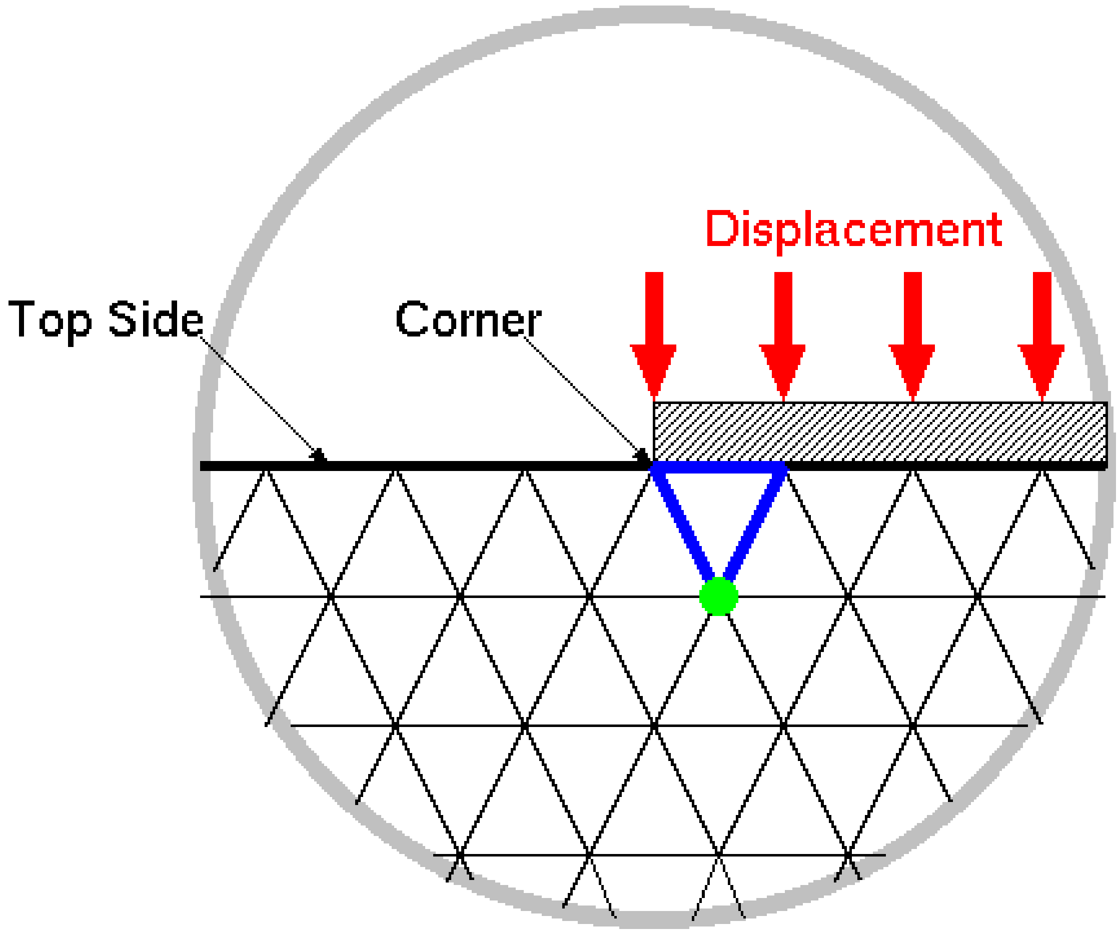
- 粘弾性（E_{inf}=1GPa, ν_{inf}=0.48, g=0.9, τ=5s）
- 準静的, 平面歪み
- 左右辺を左右拘束
- 下辺を上下拘束
- 上辺右半分を左右拘束＋下方向に一定速度で強制変位
- 上辺中央部を細かく, 他を荒くメッシュ分割

押込解析(FEM)

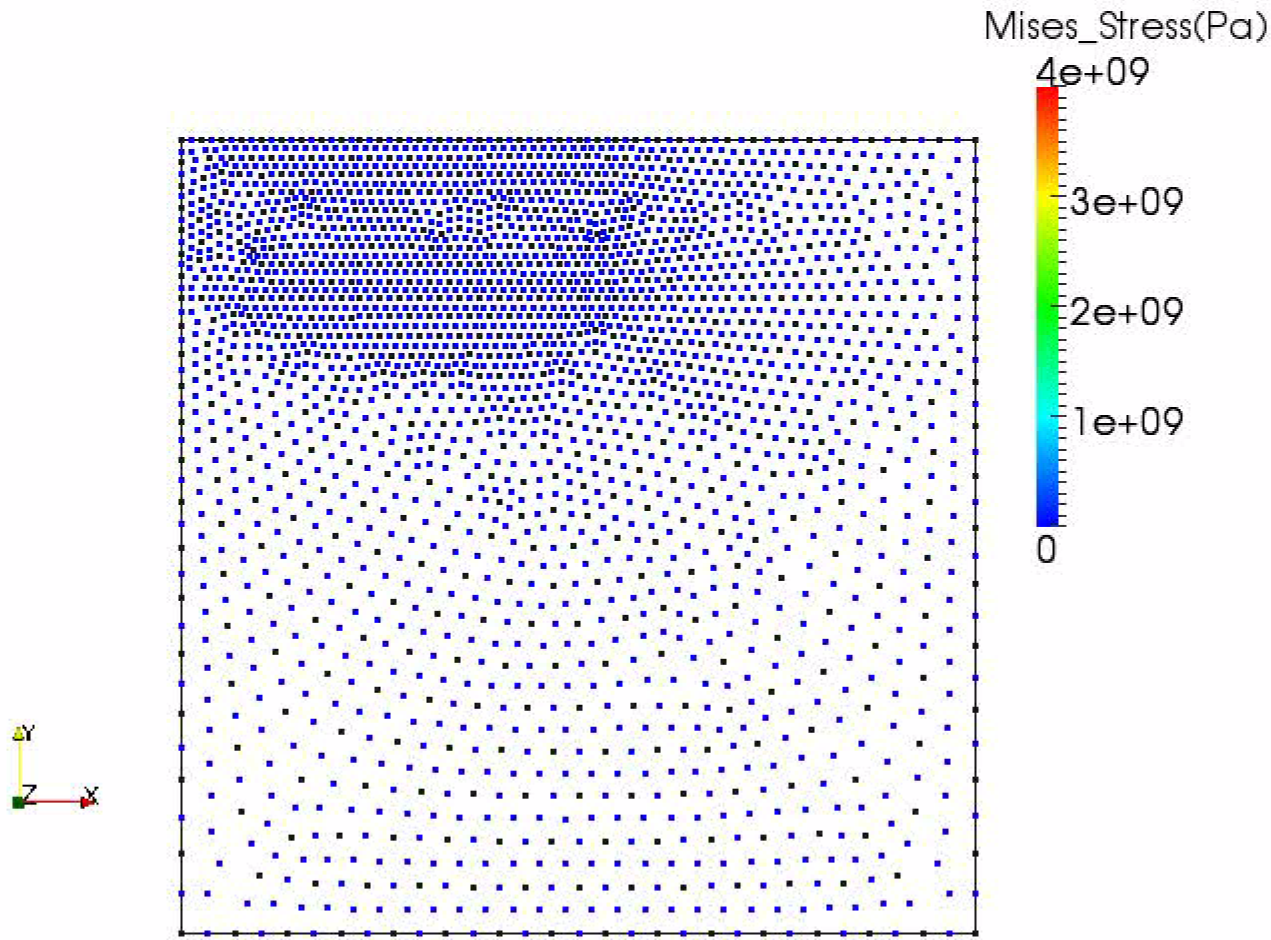


■ 角部下の体積ロッキングの為，奇妙な変形を起こす．

押込解析(FEM)



押込解析(アニメーション)



■妥当な変形挙動を示している.（要検証）

まとめ／今後の予定

■まとめ

- 応力点積分の一種である**浮動応力点積分**によるメッシュフリー大変形解析法を提案した.
- 大変形パッチテストの通過を確認した.
- 大たわみ問題ならば既に充分使えるレベルにある.
- 大ひずみ問題はいま1歩の改良が必要.

■今後の予定

- 計算速度の向上
- 大ひずみの検証（アダプティブメッシングと比較？）
- 弾性・粘弾性以外の材料モデル
- 接触機能
- 節点，応力点の自動追加