

# 四面体を用いた平滑化有限要素法 による大変形解析の最新動向

東京工業大学  
工学院 システム制御系  
大西 有希



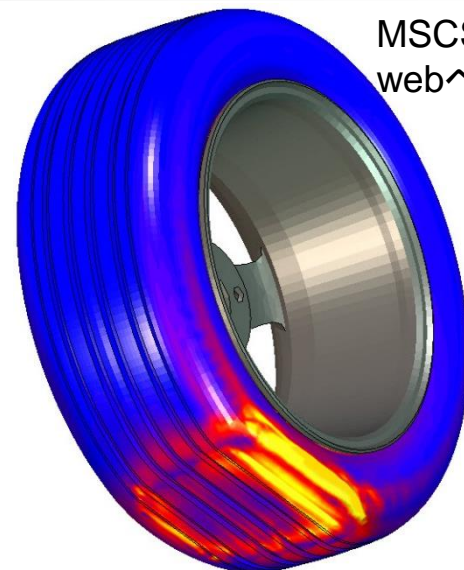
# 研究背景

## 【実現したい内容】

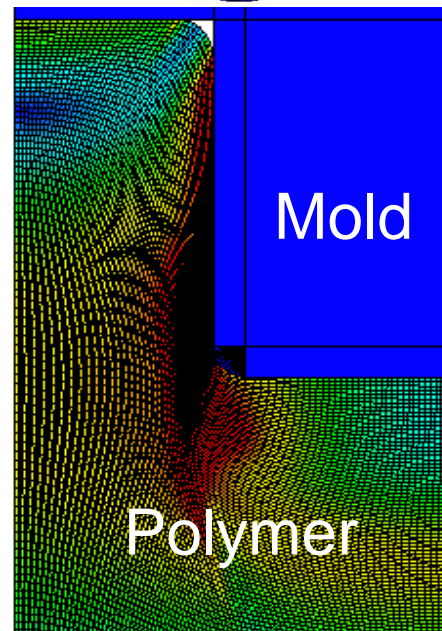
- 「超」大変形問題を高精度かつ安定に解きたい。
- 複雑形状の問題を四面体で解きたい。
- 自動リメッシングも実現したい。
- 微圧縮性材料も解きたい。
- 接触も扱いたい。

## 【最終目標】

ゴム(超弾性), ガラス点付近の樹脂(粘弾性), および大きな塑性変形を起こした金属(弾塑性)の大変形解析



MSCSoftware  
webページより



# 既存手法の問題点

四面体を用いる既存のFEMは微圧縮性を有する材料の解析において精度と安定性に未だ問題がある。

## ■ 高次要素:

✗ 体積ロッキングが不可避。

中間節点の存在による接触や大変形の精度低下と不安定。

## ■ 拡張ひずみ仮定法(EAS):

✗ 擬似ゼロエネルギーモードにより不安定。

## ■ B-bar法, F-bar法, Selective法:

✗ 四面体要素にはそのまま適用できない。

## ■ F-barパッチ法:

✗ 良いパッチを作ることが難しい。

## ■ u/p混合(ハイブリッド)法:

✗ 今のところ完全に満足できる定式化が提案されていない。

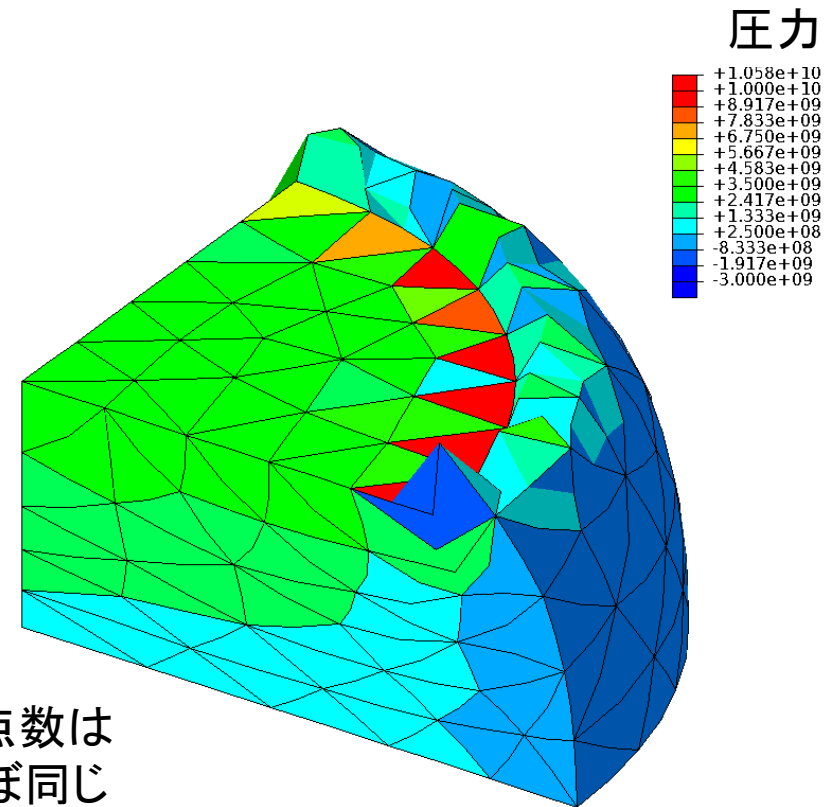
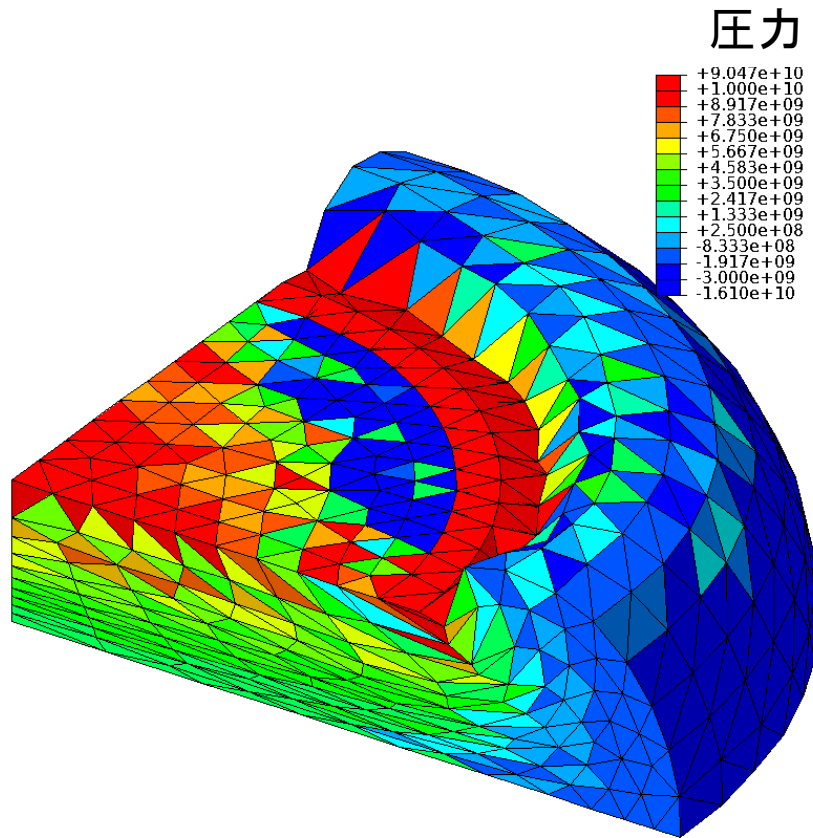
ただし, ある程度許容出来るものは提案されている。

(例: ABAQUS/Standardの「C3D4H」や「C3D10MH」など)



# 既存手法の問題点(つづき)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



節点数は  
ほぼ同じ

四面体1次ハイブリッド要素(C3D4H)

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✗ 圧力振動(チェッカーボード)あり.
- ✗ コーナーロッキングあり.

四面体2次修正ハイブリッド要素(C3D10MH)

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✗ 内挿の精度低下あり.
- ✗ 早期の収束困難あり.

# 解決策

平滑化有限要素法 (Smoothed Finite Element Method: **S-FEM**) という新しい有限要素定式化のアイデアが近年提案され、研究が進んでいる。

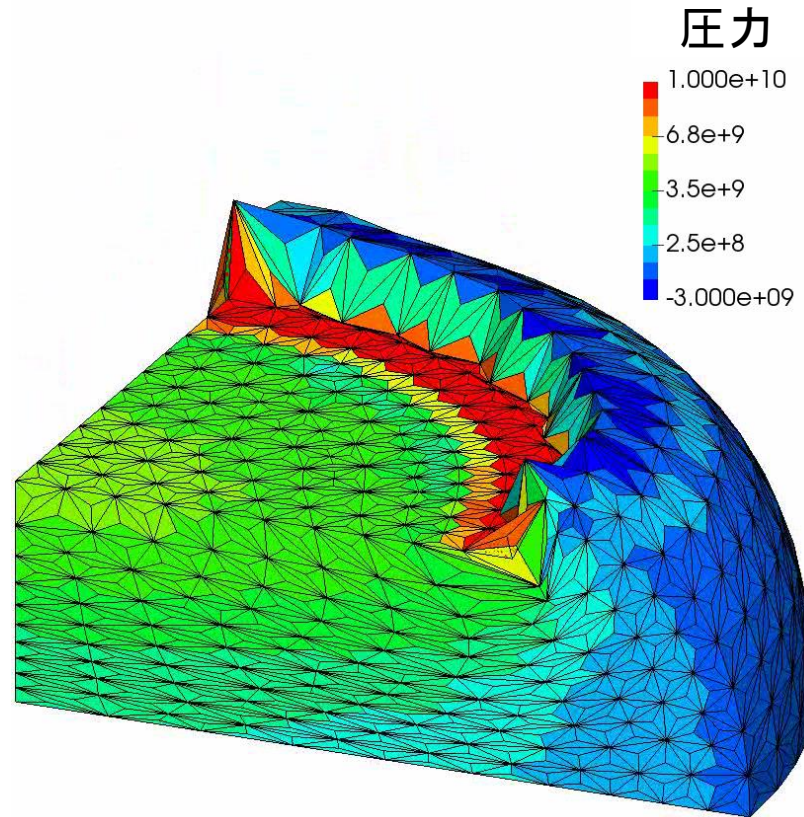
特に、最新の S-FEM 定式化である **F-barES-FEM-T4** (詳細は後述) は

- 4節点四面体要素 (中間節点なし)
- せん断 / 体積 / コーナーロッキングフリー
- 圧力振動フリー
- 大変形でも安定

の全てを満足する定式化であることが確認された。

# 解決策(つづき)

四面体解析例) 材料: neo-Hookean超弾性体,  $\nu_{ini} = 0.49$



メッシュは  
先程のC3D4H  
と同じ.

F-barES-FEM-T4 (最新の平滑化有限要素法)

- ✓ せん断・体積ロッキングなし.
- ✓ 圧力振動は充分小さい.
- ✓ コーナーロッキングも充分小さい.

# 発表内容

最新の平滑化有限要素法(S-FEM)定式化である  
F-barES-FEM-T4を中心に,

- 各種S-FEMの定式化概要を解説,
- 超弾性体および弾塑性体の解析例を紹介.

## 発表目次:

- 古典的S-FEMの定式化概要と解析例
- 最新形S-FEMの定式化概要と解析例
- まとめ



# 古典的S-FEMの定式化概要と解析例



# Smoothed Finite Element Method (S-FEM)とは？

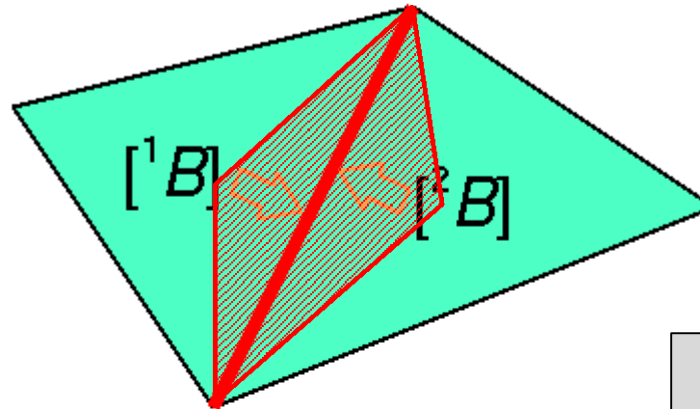
- G. R. Liuらが2007年に提案した新しいFEMの定式化.
- ひずみ平滑化(Strain Smoothing)手法の一種.
- S-FEMには幾つかのタイプがあり, 4節点四面体を用いるS-FEM-T4では主に次の3種が挙げられる.
  - 要素辺で平滑化するEdge-based S-FEM (**ES-FEM**)
  - 節点で平滑化するNode-based S-FEM (**NS-FEM**)
  - **ES-FEM**と**NS-FEM**を組み合わせた**Selective ES/NS-FEM**

簡単のため, 三角形要素を用いた2D解析で使用する  
**ES-FEM**, **NS-FEM**および**Selective ES/NS-FEM**  
について順に解説します.

# ES-FEMの定式化概要

- 要素の $[B]$ を通常のFEMと同様に計算する.
- 要素の $[B]$ を周囲の**エッジ**に要素体積を重みとして配り,  
**エッジ**で平均化して $[^{\text{Edge}}B]$ を作る.
- **エッジ**の平滑化領域の量として歪み, 応力, 節点内力を計算する.

積分点が  
各エッジ中心に  
あるイメージ



$[^{\text{Edge}}B]$

Edge  $T$

$\{f^{\text{int}}\}$

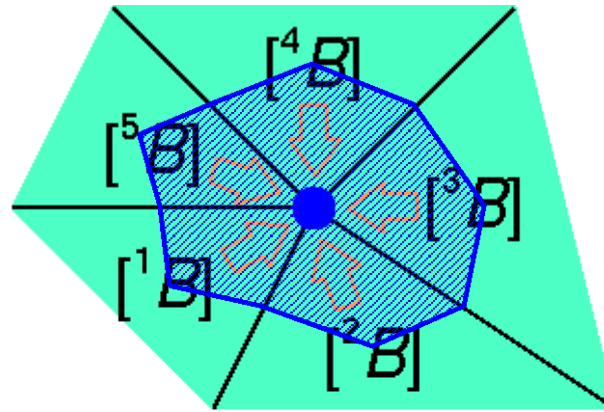
**ES-FEM**

体積ロッキングや  
圧力振動を抑える  
ことは出来ないが,  
**四面体要素で  
せん断ロッキングを  
回避できる.**

# NS-FEMの定式化概要

- 要素の $[B]$ を通常のFEMと同様に計算する.
- 要素の $[B]$ を周囲のノードに要素体積を重みとして配り、ノードで平均化して $[^{\text{Node}}B]$ を作る.
- ノードの平滑化領域の量として歪み, 応力, 節点内力を計算する.

積分点が各ノードにあるイメージ



$[^{\text{Node}}B]$

Node  $T$

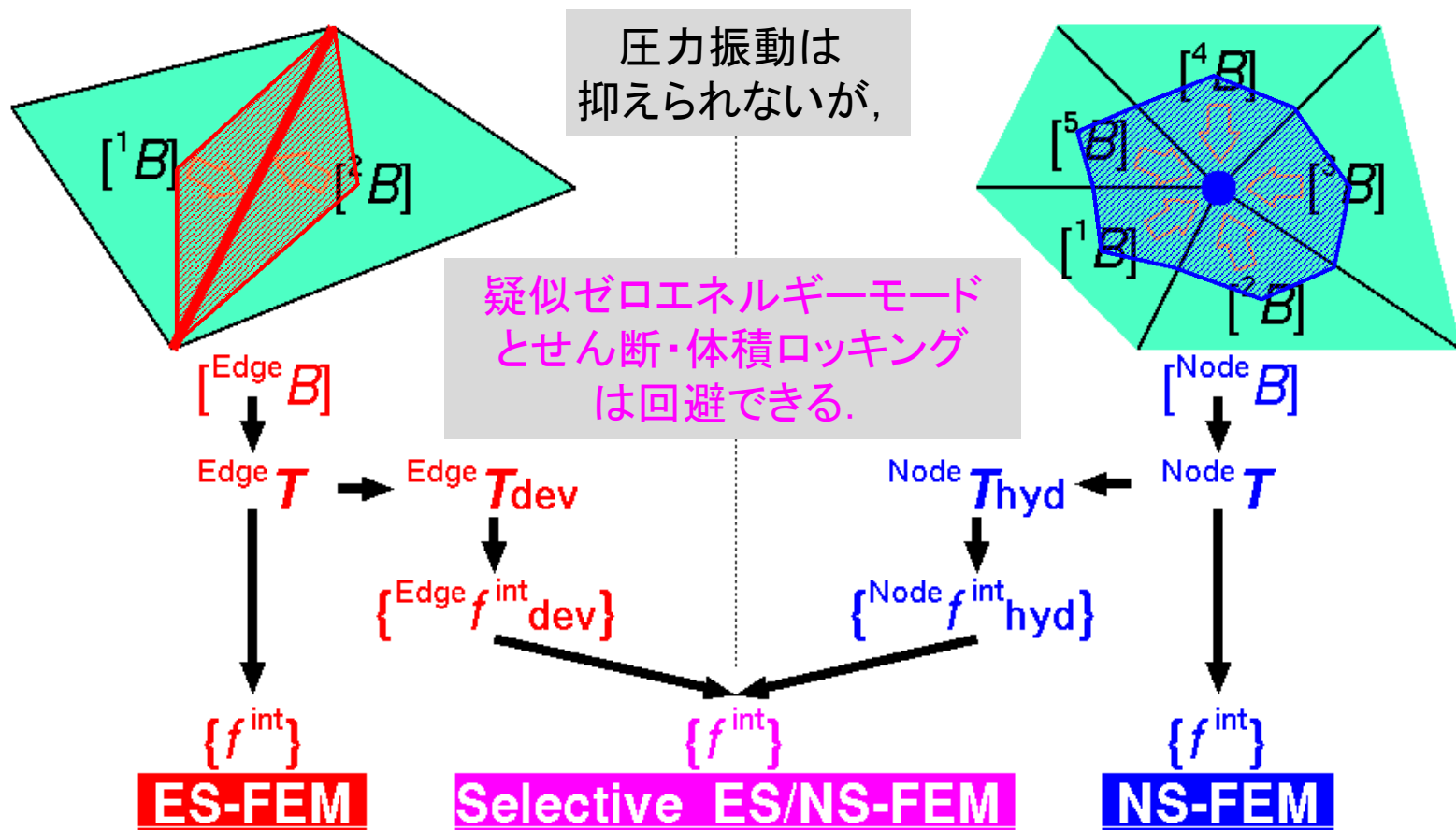
$\{f^{\text{int}}\}$

**NS-FEM**

疑似ゼロエネルギーモード (アワーグラスモードと同様) が現れてしまうが、四面体要素でせん断・体積ロッキングを回避し、圧力振動もやや抑制できる。

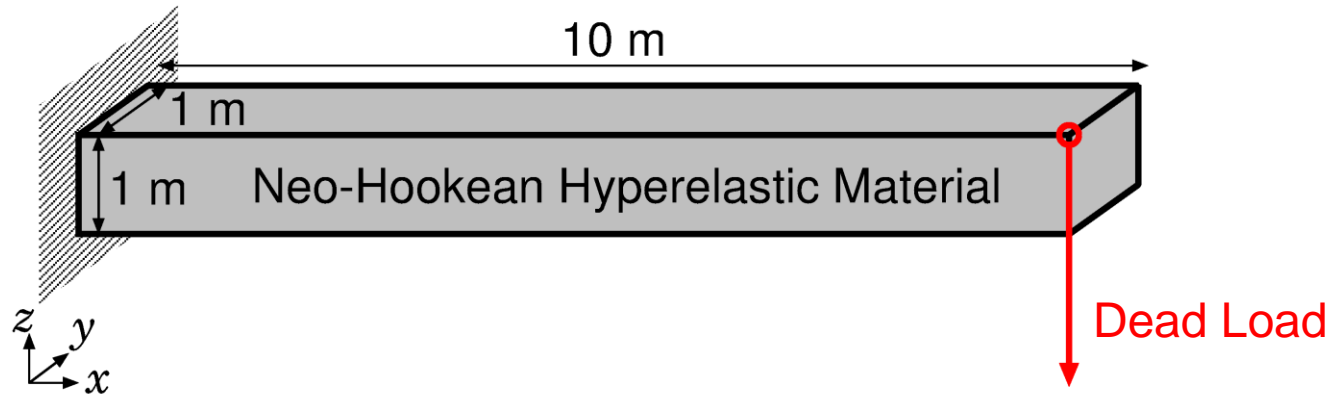
# Selective ES/NS-FEMの定式化概要

- 応力を“deviatoric (偏差) part”と“hydrostatic (静水圧) part”に分解する.
- 歪み, 応力, 節点内力をエッジとノードの両方でそれぞれ計算して2つを合算する.



# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

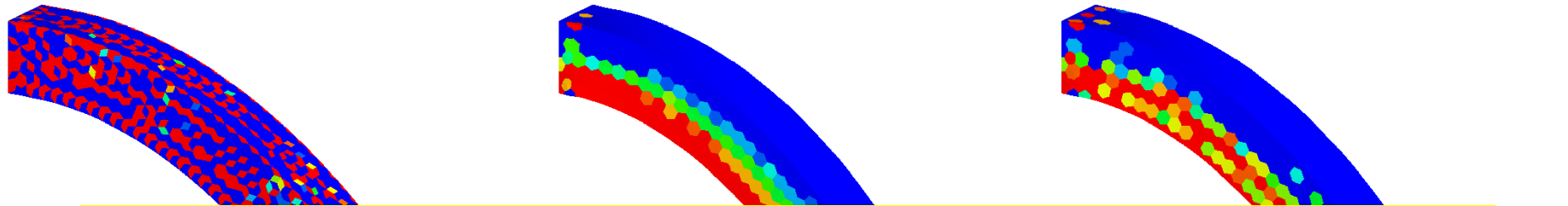
## 概要



- 10m x 1m x 1m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hookean超弾性体:  $T = 2C_{10} \frac{\text{Dev}(\bar{\mathbf{B}})}{J} + \frac{2}{D_1} (J - 1) \mathbf{I}$ .  
初期ヤング率6 GPa, 初期ポアソン比0.499に設定.
- ES-FEM, NS-FEM, Selective ES/NS-FEMで  
変形と圧力分布を比較.

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

## 変形と圧力分布



古典的S-FEMでは微圧縮性材の圧力振動を抑え切れない。  
ただし、NS-FEMには圧力振動の抑制効果が期待できる為、  
**Selective法**以外の**ES-FEM**とNS-FEMの合成法に勝機あり。

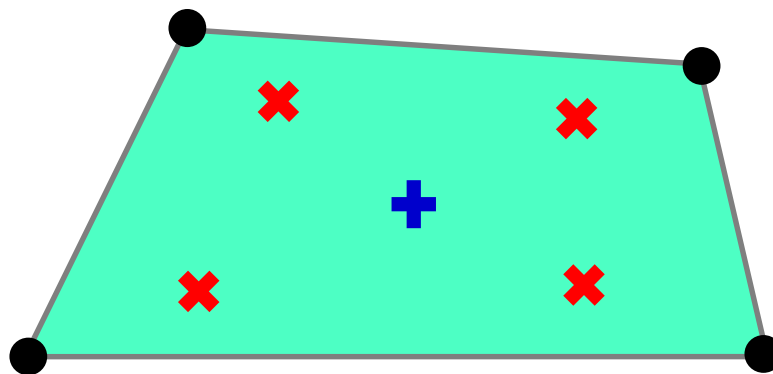


- **ES-FEM**はロッキング + 圧力振動(大)あり。
- **NS-FEM**は(見辛いが)アワーグラス + 圧力振動(小)あり。
- **Selective ES/NS-FEM**は圧力振動(中)あり。

# 最新形S-FEMの定式化概要と解析例 = F-barES-FEM

# F-bar法のおさらい

四角形(Q4)要素  
および  
六面体(H8)要素  
のための手法



体積変形対する  
一種の  
ローパスフィルター

## アルゴリズム

- 標準的FEMと同様, **各積分点**で変形勾配  $F$  を計算する.
- **要素中心**でも変形勾配  $F$  を計算し, その体積変化率  $\det(F)$ を  $\bar{J}$  とおく.
- **各積分点**の変形勾配を次式により修正し, **合成された  $\bar{F}$** を得る.

$$\bar{F} = \bar{J}^{1/3} F^{\text{iso}}.$$

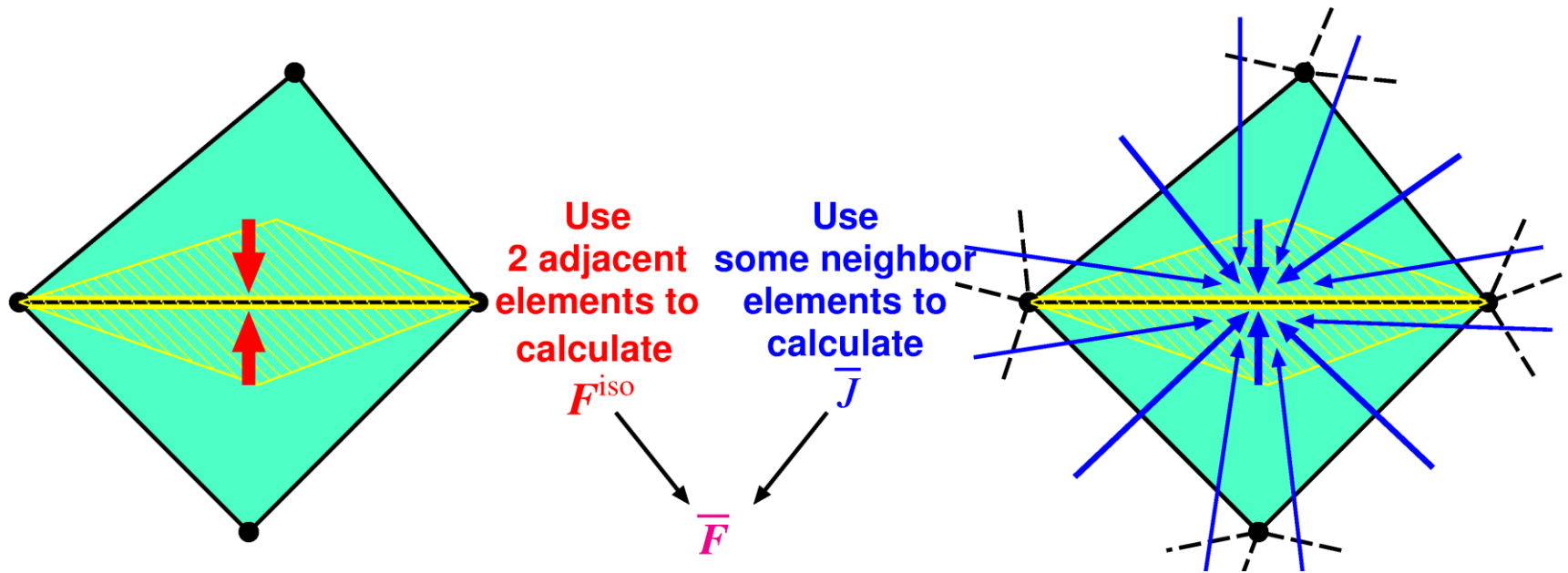
- $\bar{F}$  を **各積分点**変形勾配とみなし, 応力・内力・剛性等計算する.

四角形および六面体要素でせん断ロッキングは回避できないが  
**体積ロッキングを回避できる.**



# F-barES-FEMの定式化概要

- エッジの  $F^{iso}$  をES-FEMを用いて計算する.
- エッジの  $\bar{J}$  にはNS-FEMを繰り返し適用して空間的にローパスフィルタされた  $J$  の値を用いる(詳細は後述).
- F-bar法を用いてエッジの  $\bar{F}$  を合成する. 以降の計算はES-FEMと同様.



せん断／体積／コーナーロッキング  
および圧力振動が発生しない。

# F-barES-FEMの計算手順概要

## F計算法の概略

1. 要素の  $J$  を標準的FEMと同様に計算.
2. 要素の  $J$  を節点で平滑化し, 節点の  $\tilde{J}$  とする.
3. 節点の  $\tilde{J}$  を要素で平滑化し, 要素の  $\tilde{\tilde{J}}$  とする.
4. 上記 2.と3.を必要回数( $c$ 回)繰り返す.
5. 要素の  $\tilde{\tilde{J}}$  をエッジで平滑化し, エッジの  $\bar{J}$  とする.
6. F-bar法に倣い, ES-FEMで得られる  $F^{iso}$  と  $\bar{J}$  を 
$$\bar{F} = \bar{J}^{1/3} F^{iso}$$
 で合成する.

$J$  の  
繰り返し  
平滑化

=ローパス  
フィルタ

繰り返し平滑化回数を  $c$  回とした時の手法を  
「F-barES-FEM( $c$ )」と表記する.



# S-FEM定式化に共通の特徴

## 未知数が節点変位のみ の純粋な変位形FEMである！

### 【利点】

- 圧力や体積ひずみ等の追加変数を必要としない。
- Lagrange未定乗数法が不要となり、静的縮約でマトリックスの形が崩れる恐れがない上、動的陽解法でも微圧縮性材料が扱える。
- 混合型変分原理を用いないので実装が極めて容易。

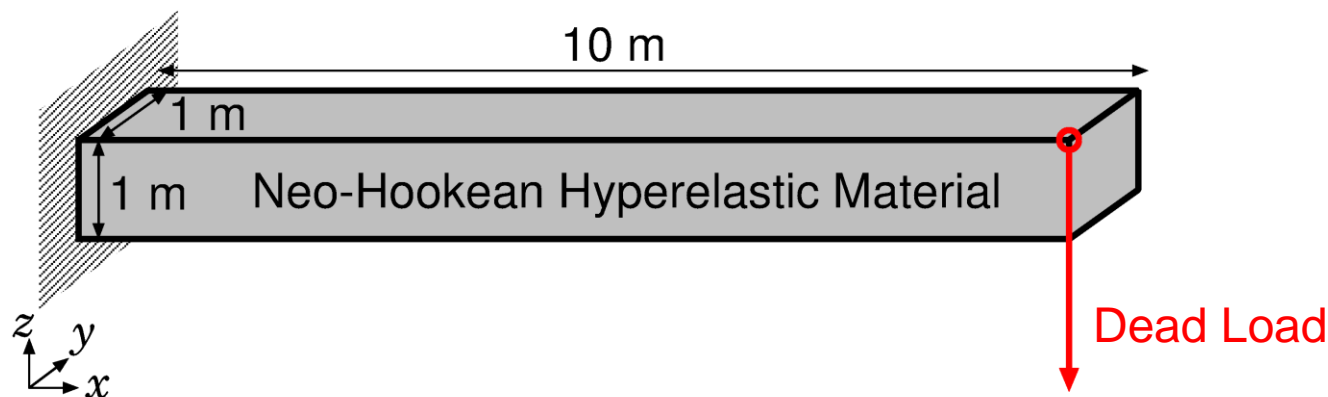
### 【欠点】

- 標準的なFEMよりバンド幅は広がってしまう。
- 要素間で平滑化を行う都合上、既存FEMソフト上のユーザー定義要素として実装できない。



# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

## 概要



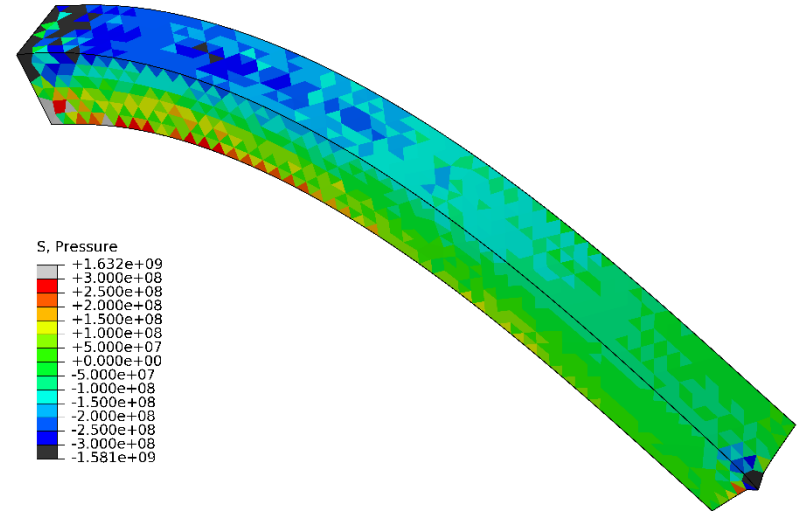
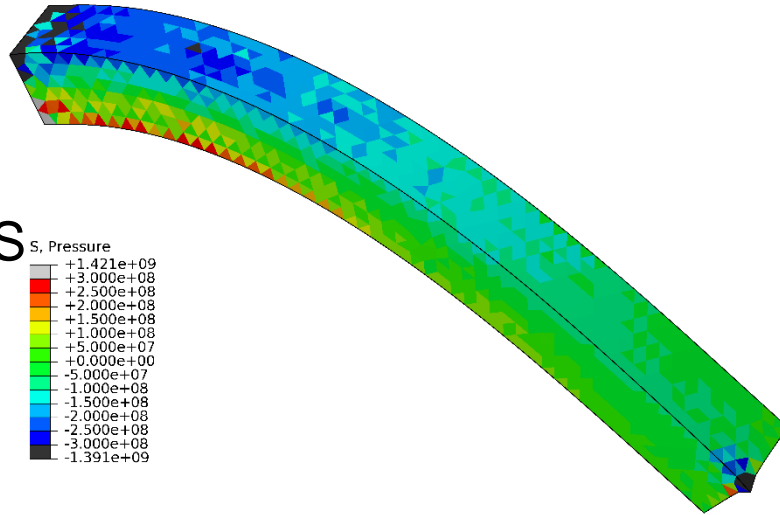
- 10m x 1m x 1m の片持ち梁の先端に死荷重.
- Neo-Hookean超弾性体:  $T = 2C_{10} \frac{\text{Dev}(\bar{\mathbf{B}})}{J} + \frac{2}{D_1} (J - 1) \mathbf{I}$ .
- 初期ヤング率は 6 GPaで一定とし,  $D_1$  を変化させて初期ポアソン比を0.49, 0.499の2通りに設定.
- F-barES-FEM-T4(1), (2), (3)を用いて解析.
- ABAQUSの四面体ハイブリッド要素(C3D4H)と比較.

# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

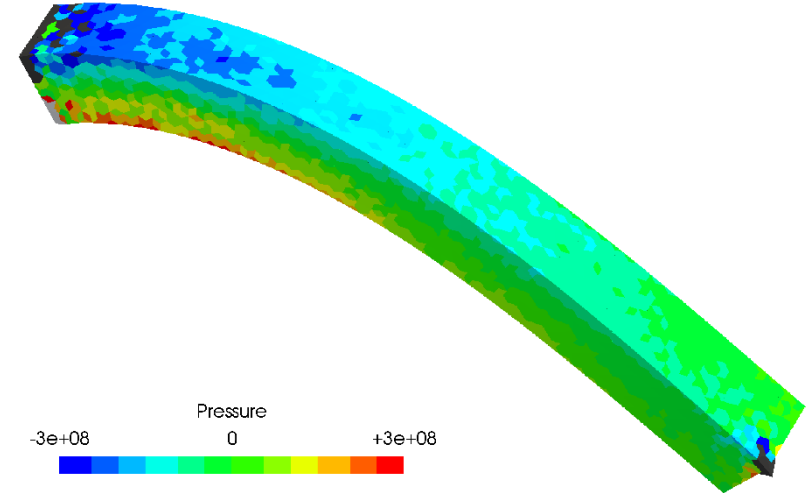
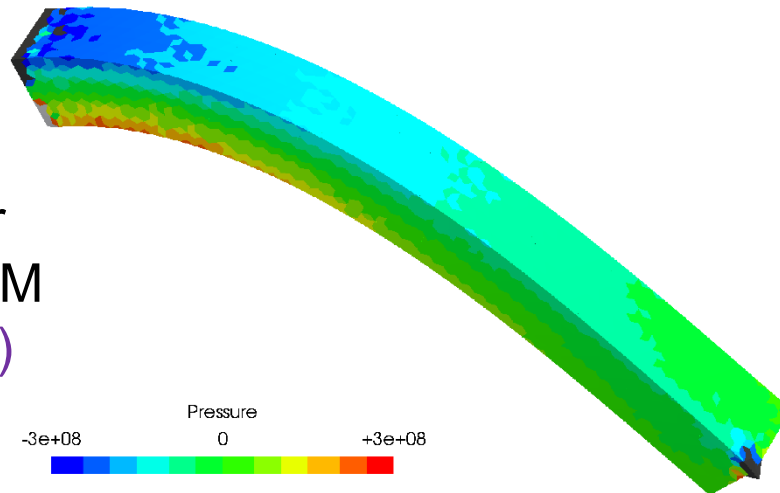
変形と  
圧力分布

$$\nu^{\text{ini}} = 0.49$$

$$\nu^{\text{ini}} = 0.499$$



F-bar  
ES-FEM  
-T4(1)



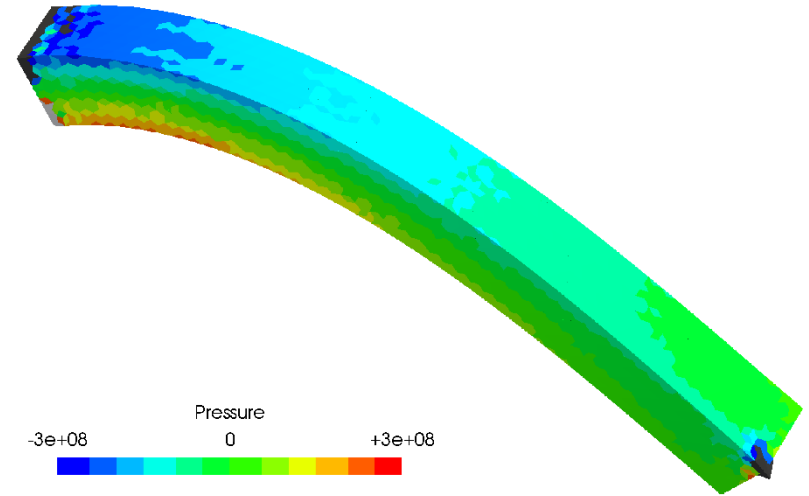
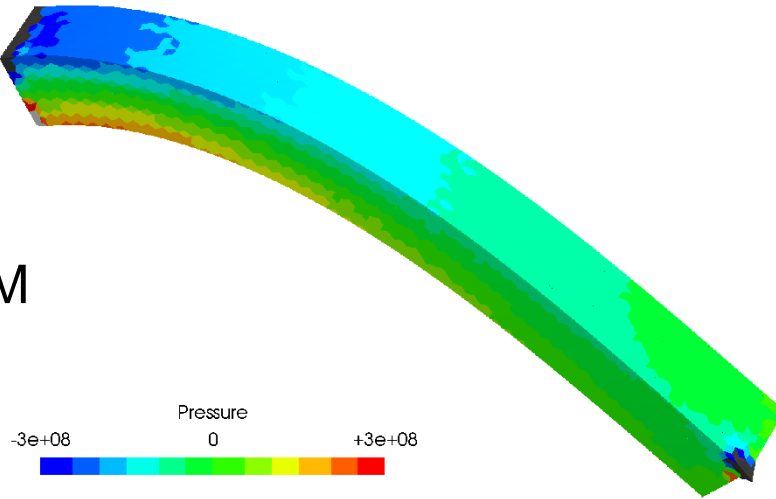
# 超弾性片持ち梁の曲げ解析

変形と  
圧力分布

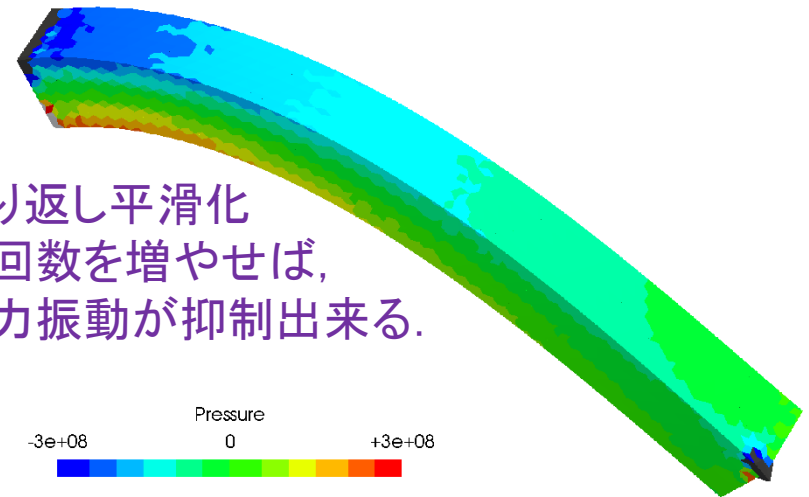
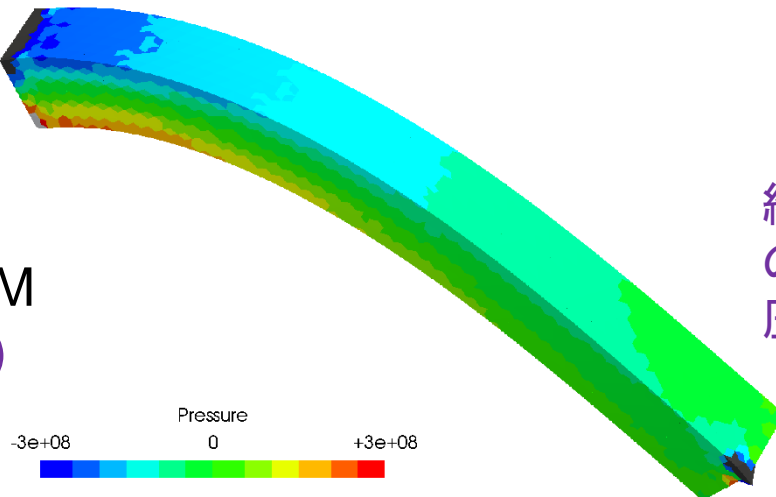
$$\nu^{\text{ini}} = 0.49$$

$$\nu^{\text{ini}} = 0.499$$

F-bar  
ES-FEM  
-T4(2)



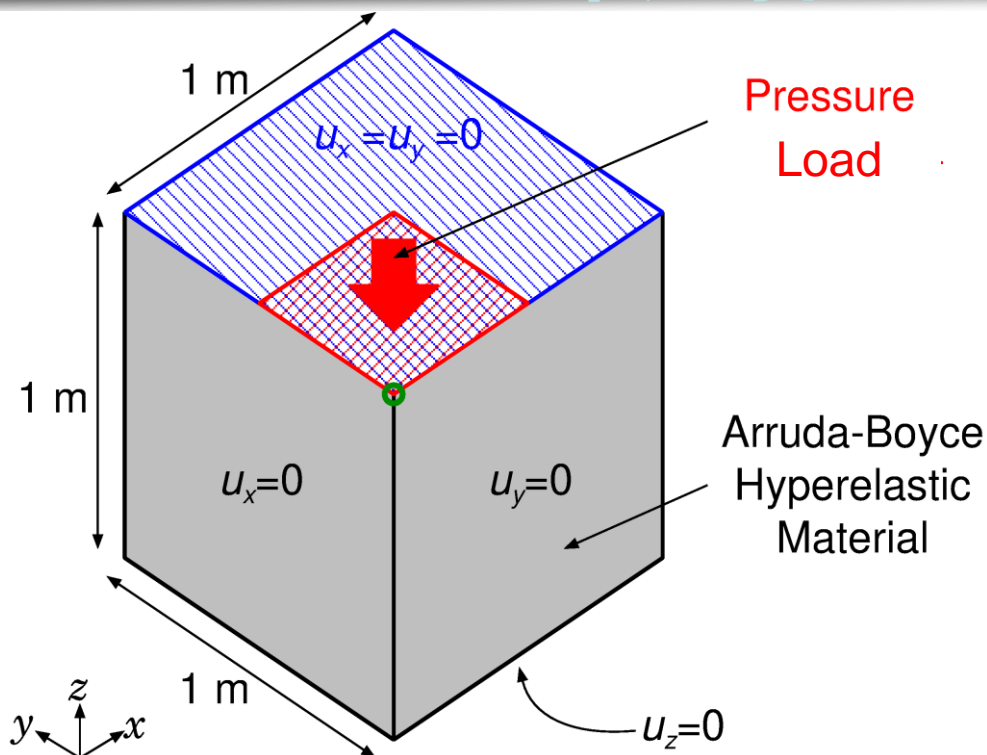
F-bar  
ES-FEM  
-T4(3)



繰り返し平滑化  
の回数を増やせば、  
圧力振動が抑制出来る。

# 超弾性ブロックの部分押込解析

## 概要



- 上面の $\frac{1}{4}$ に**圧力荷重**を負荷して押込む.
- Arruda-Boyce超弾性体, 初期ポアソン比 $\nu_{ini} = 0.499$ .
- F-barES-FEM-T4(2), (3), (4)を用いて解析.
- ABAQUSの四面体ハイブリッド要素(C3D4H)と比較.

# 超弾性ブロックの部分押込解析

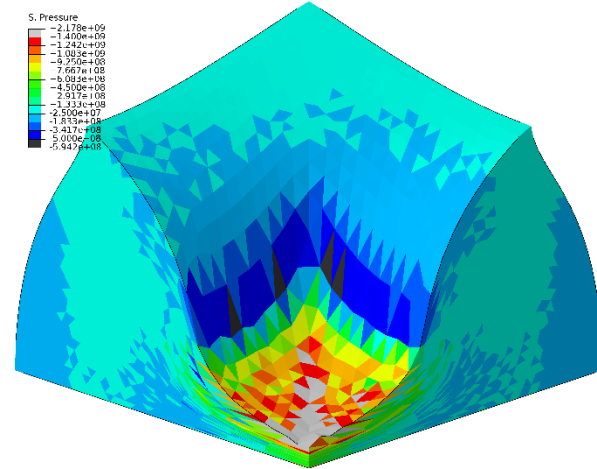
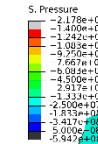
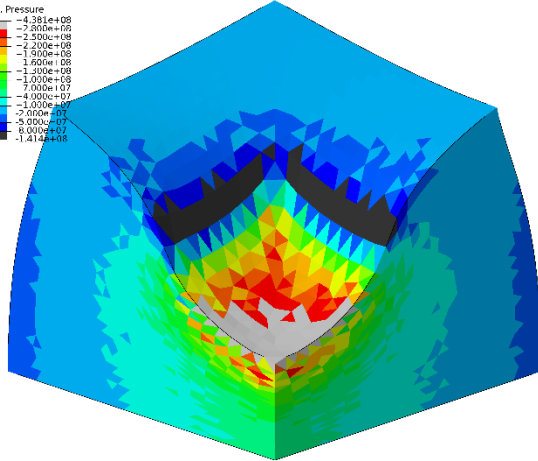
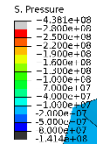
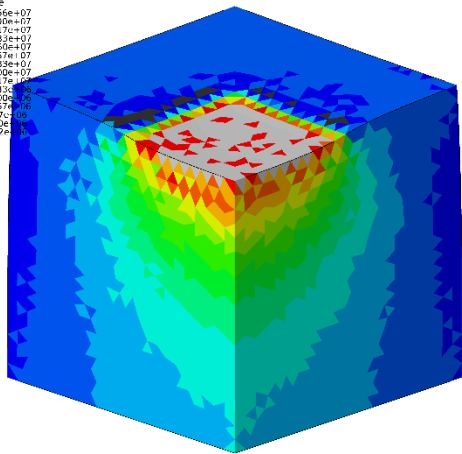
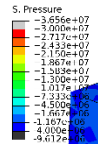
## 圧力分布

変形初期

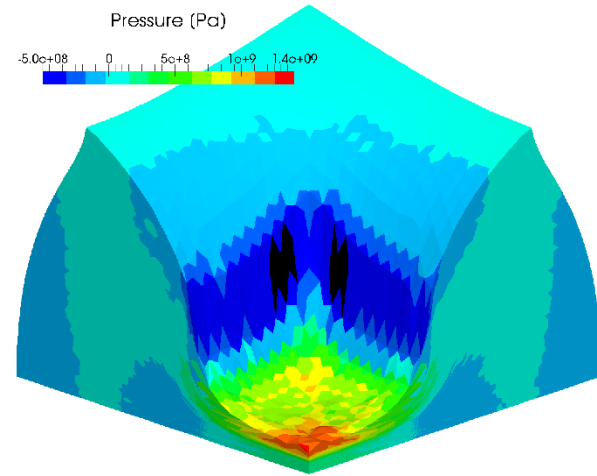
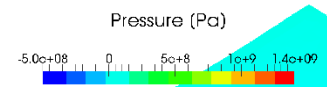
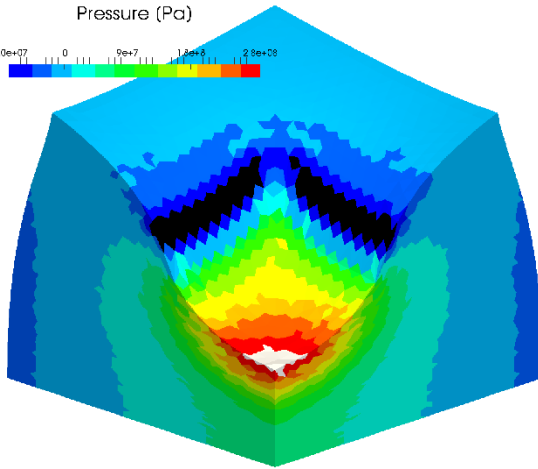
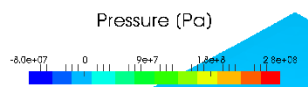
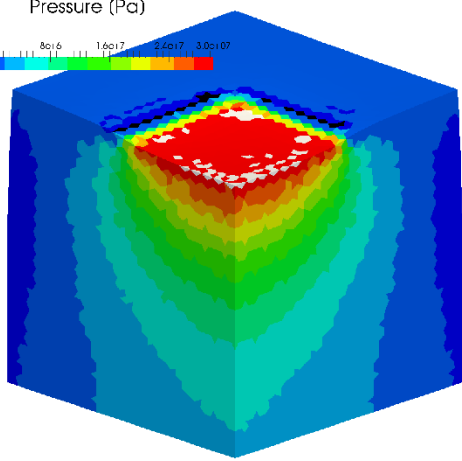
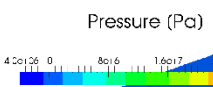
変形中期

変形後期

ABAQUS  
C3D4H



F-bar  
ES-FEM  
-T4(2)





# 超弾性ブロックの部分押込解析

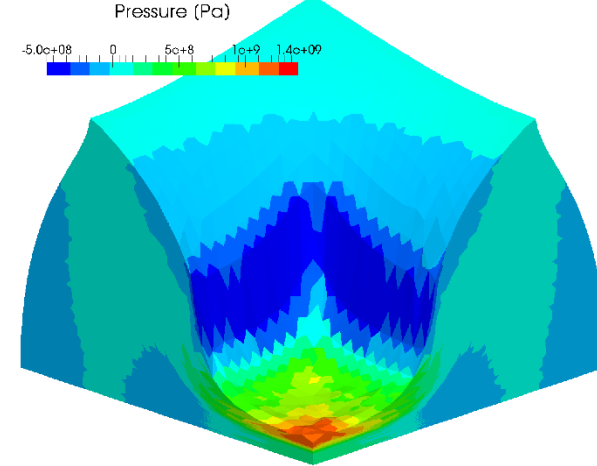
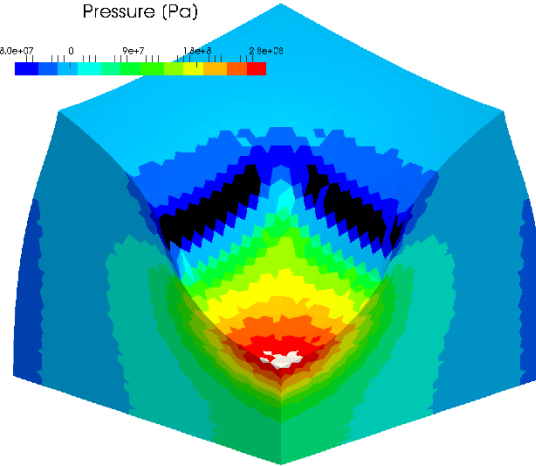
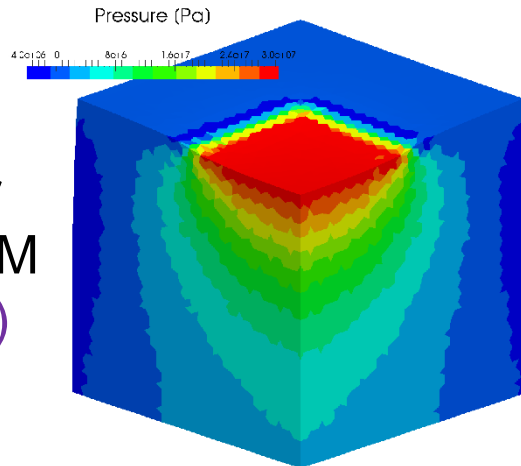
## 圧力分布

変形初期

変形中期

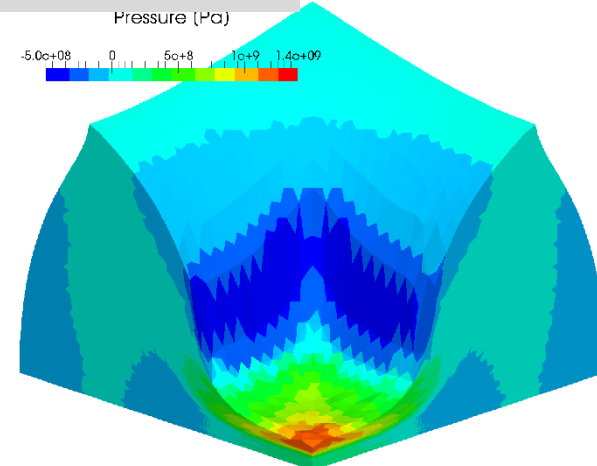
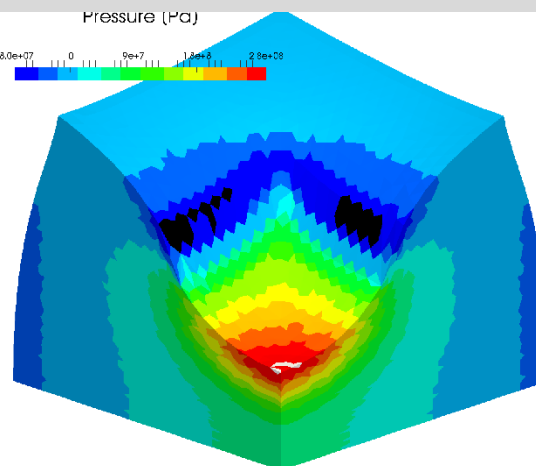
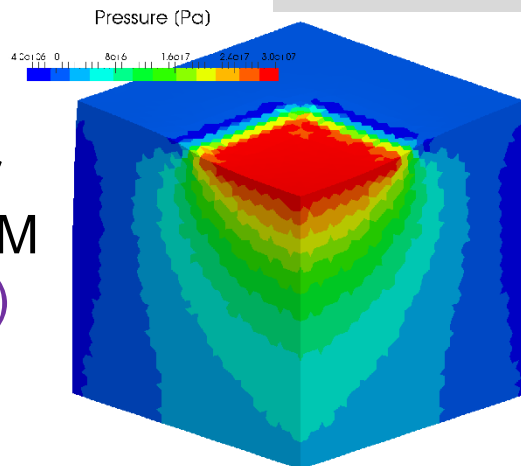
変形後期

F-bar  
ES-FEM  
-T4(3)



大歪みでも平滑化回数を増やせば良い解が得られる。

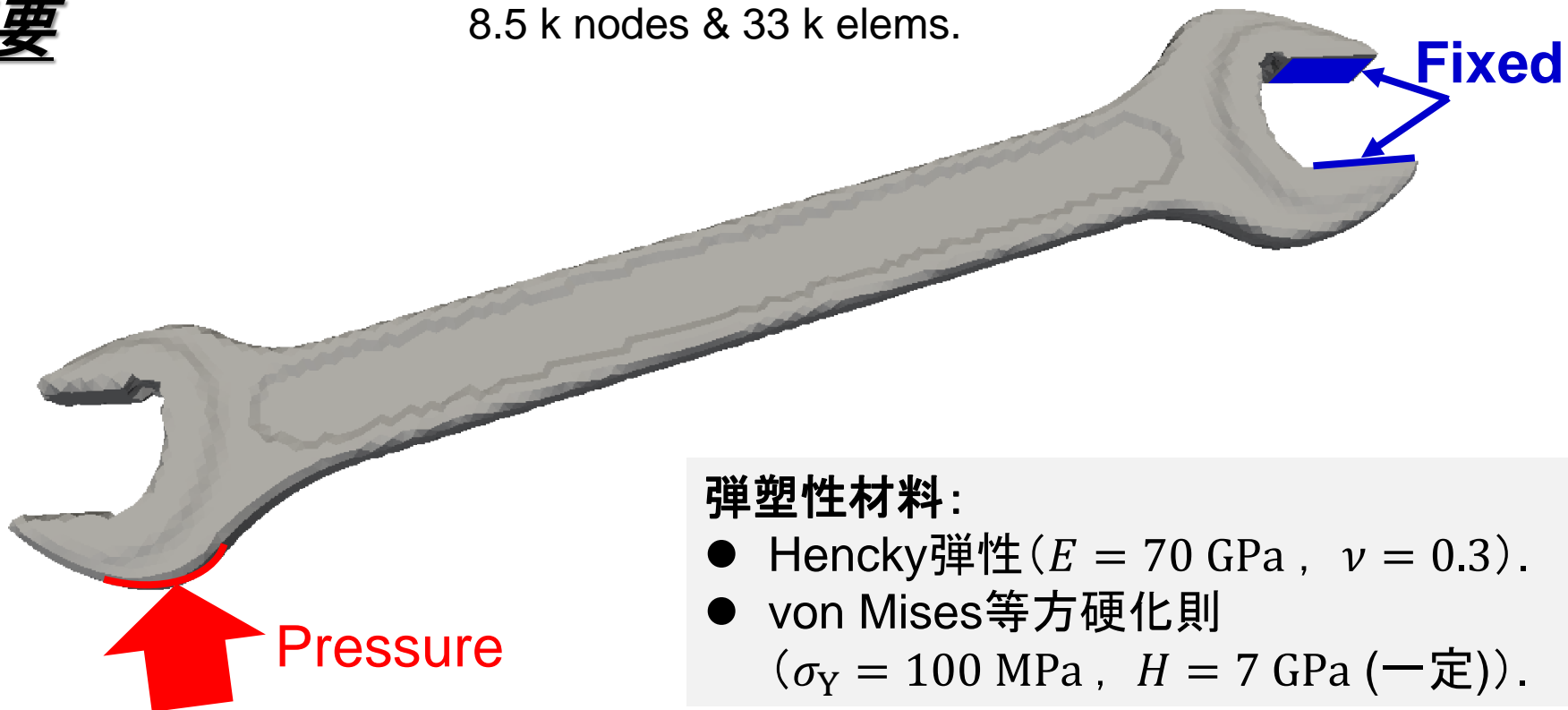
F-bar  
ES-FEM  
-T4(4)



# 弾塑性スパナの曲げ

## 概要

8.5 k nodes & 33 k elems.



### 弾塑性材料:

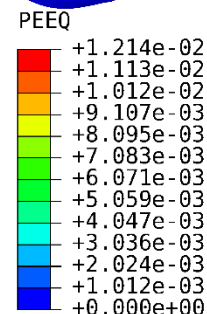
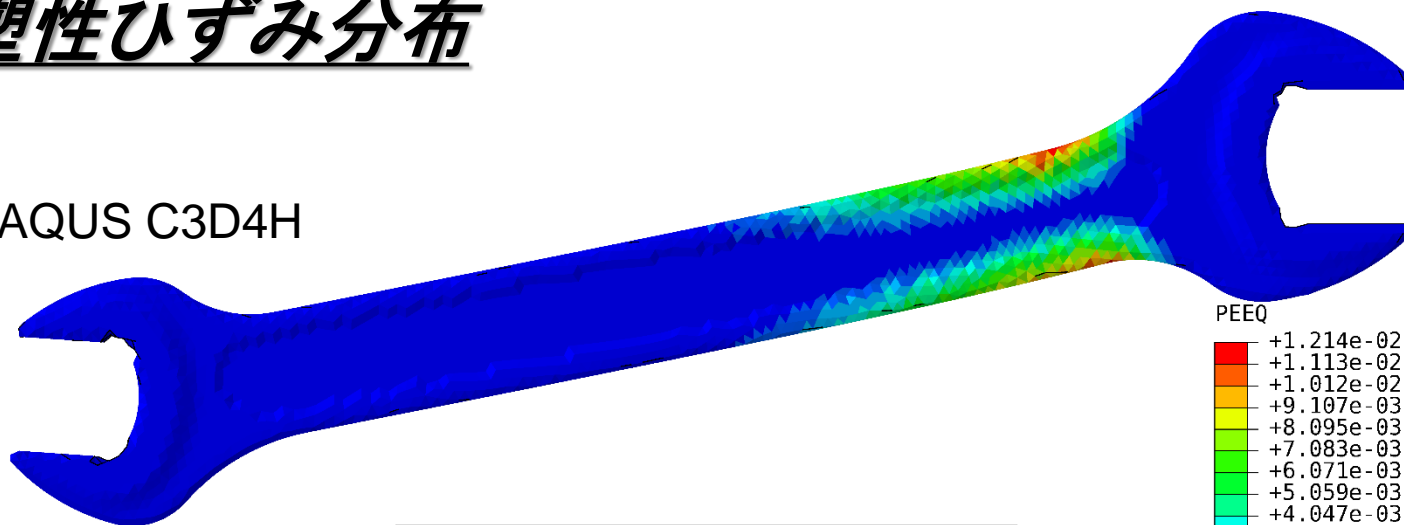
- Hencky弾性 ( $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ).
- von Mises等方硬化則  
( $\sigma_Y = 100 \text{ MPa}$ ,  $H = 7 \text{ GPa}$  (一定)).

- 右上の2面を完全拘束.
- 左下の面の一部に圧力荷重.
- 同一の非構造T4メッシュでABAQUS C3D4Hと比較.

# 弾塑性スパナの曲げ

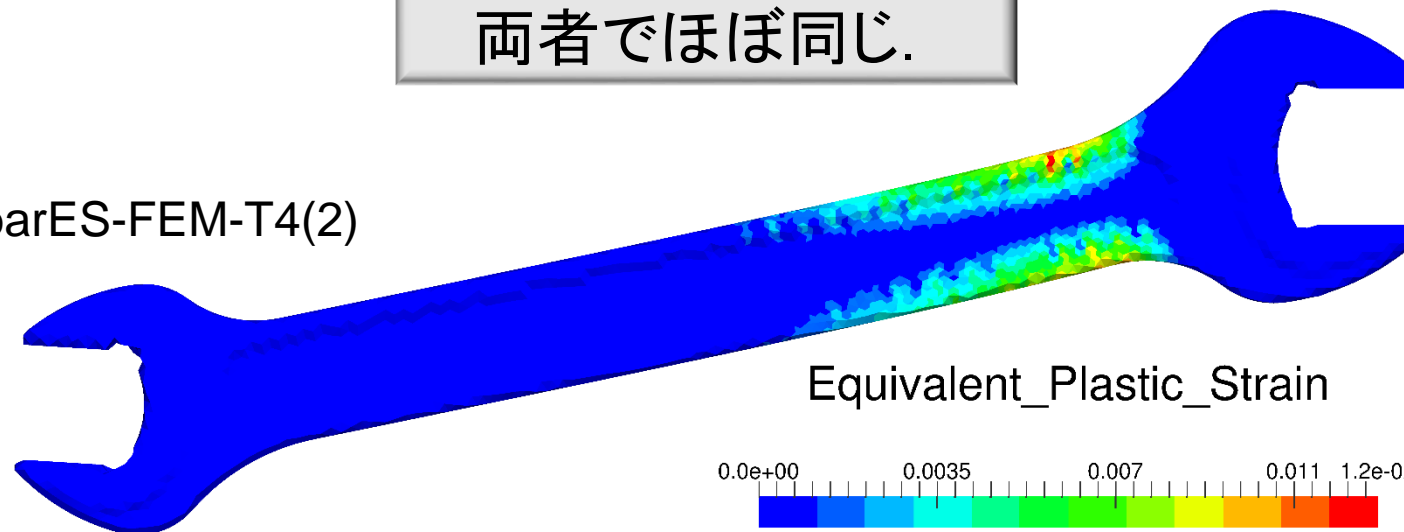
## 相当塑性ひずみ分布

ABAQUS C3D4H

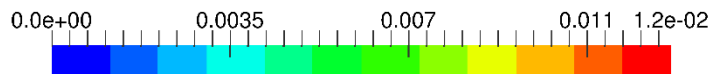


相当塑性歪み分布は  
両者でほぼ同じ.

F-barES-FEM-T4(2)



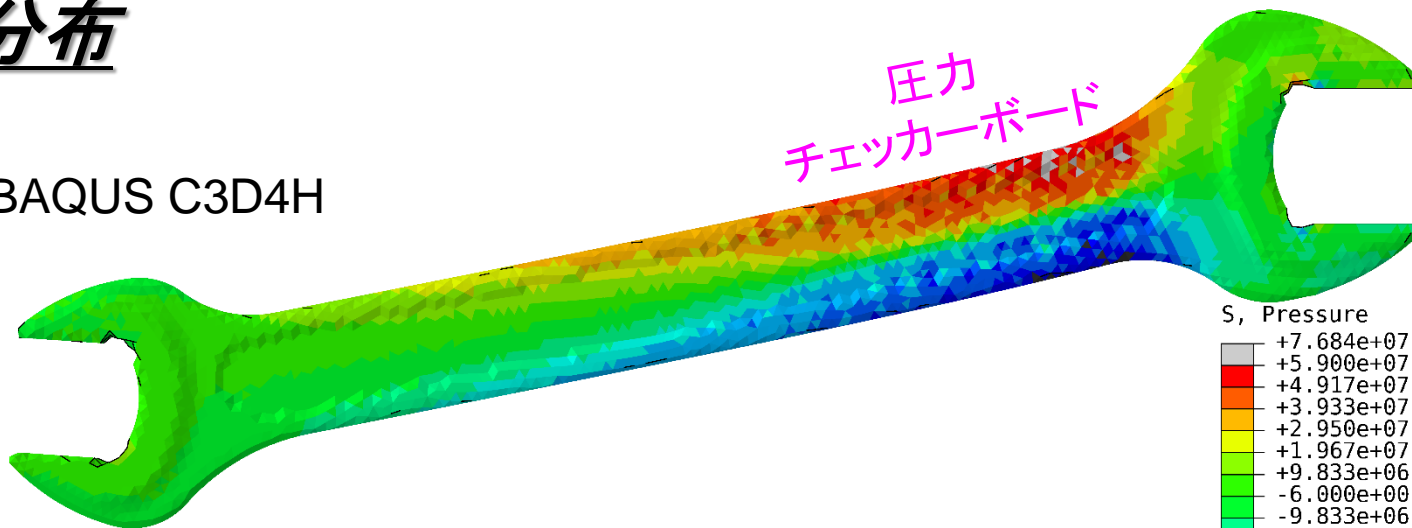
Equivalent\_Plastic\_Strain



# 弾塑性スパナの曲げ

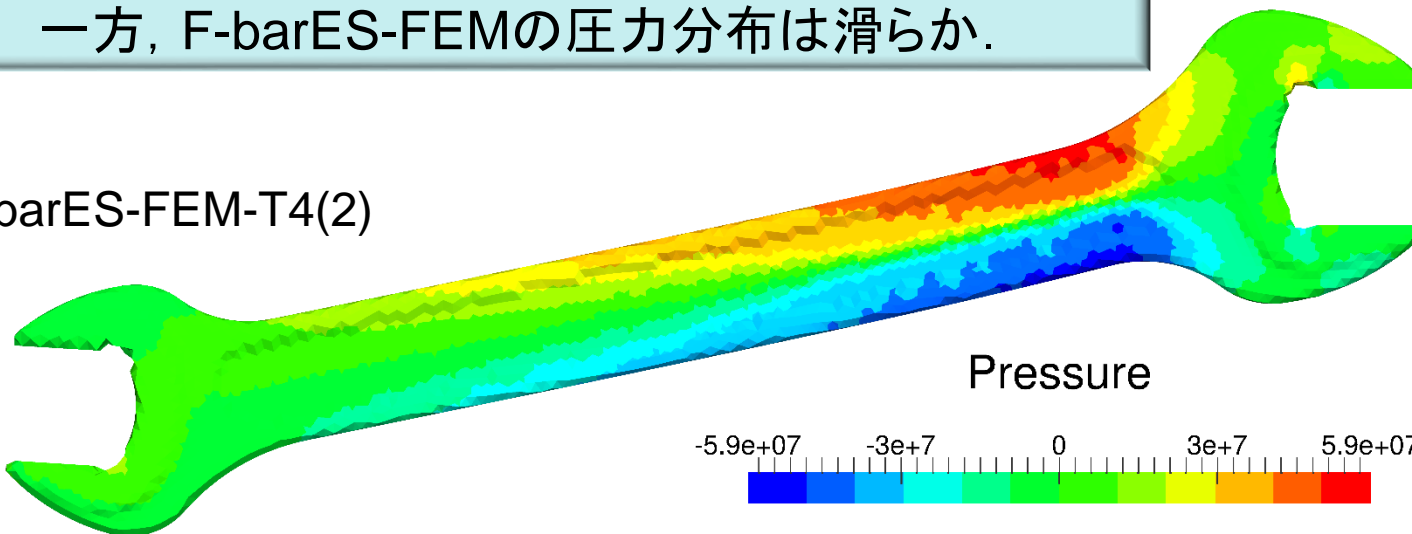
## 圧力分布

ABAQUS C3D4H



C3D4Hでは比較的小さな変形でも圧力振動がある。  
一方, F-barES-FEMの圧力分布は滑らか。

F-barES-FEM-T4(2)



# ゴム／アルミ合わせ板のねじり

## 概要

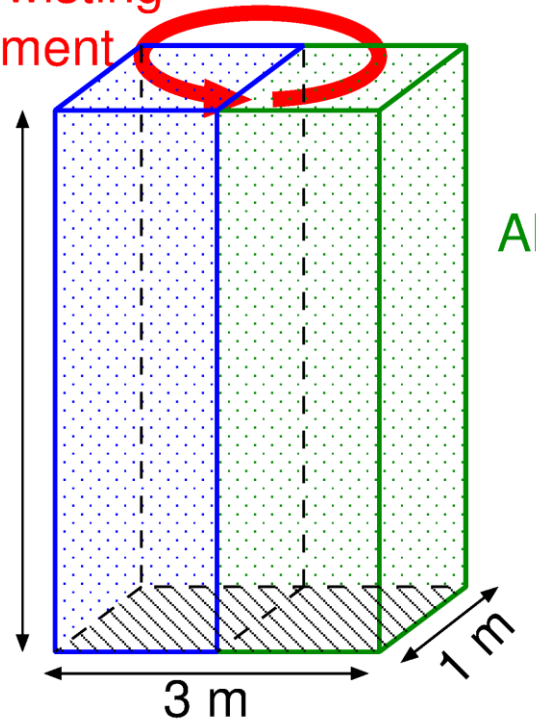
Enforced Twisting  
Displacement

3 k nodes & 14 k elems.

**ゴム:**  
Neo-Hook超弾性,  
 $E^{\text{ini}} = 5 \text{ MPa}$ ,  
 $\nu^{\text{ini}} = 0.49$ ,  
( $c = 1$ )

Rubber

5 m



Al

**アルミ:**

Hencky弾性

$$E = 70 \text{ GPa},$$

$$\nu = 0.3$$

von Mises等方硬化則

$$\sigma_Y = 100 \text{ MPa},$$

$$H = 0.7 \text{ GPa (一定)},$$

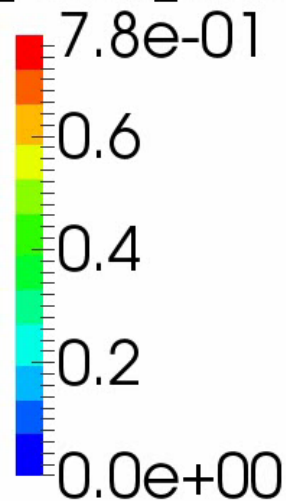
$$(c = 2)$$

- 底面を完全拘束.
- **上面**を上下拘束のうえ, 軸周りに一回転.
- ABAQUSの四面体ハイブリッド要素(C3D4H)と比較.

# ゴム／アルミ合わせ板のねじり

F-bar  
ES-FEM  
-T4  
解析結果  
相当塑性  
歪み分布

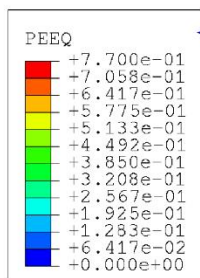
Equivalent\_Plastic\_Strain



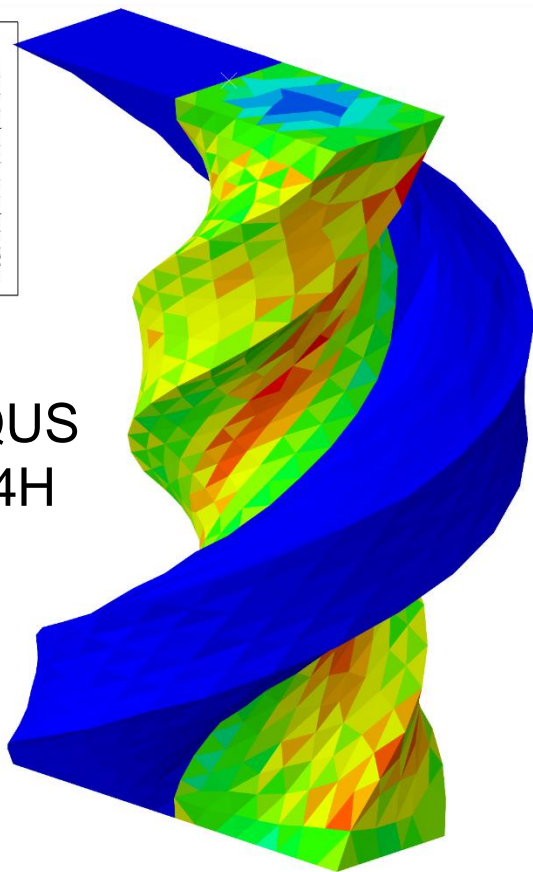
妥当な分布が  
得られている。

# ゴム／アルミ合わせ板のねじり

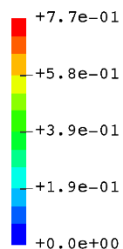
## 相当塑性歪み分布



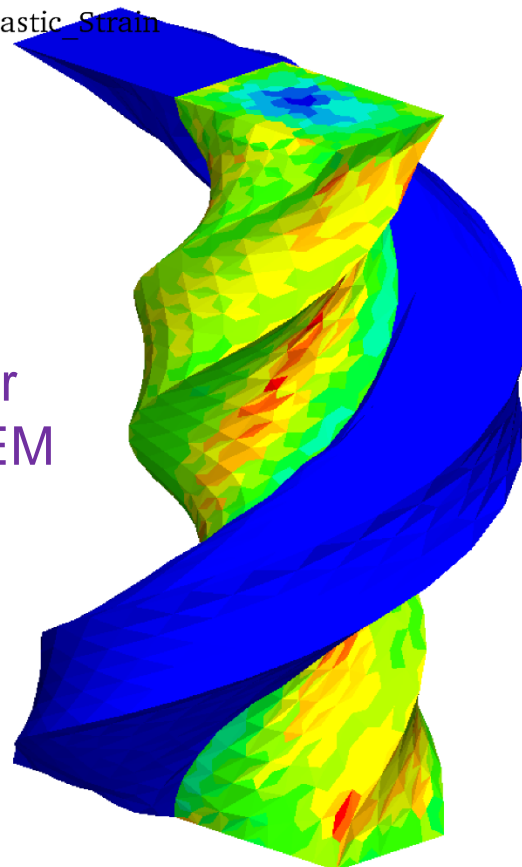
ABAQUS  
C3D4H



Equivalent\_Plastic\_Strain



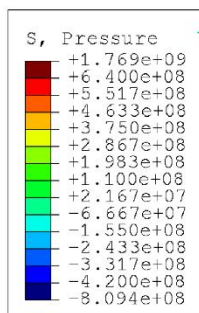
F-bar  
ES-FEM  
-T4



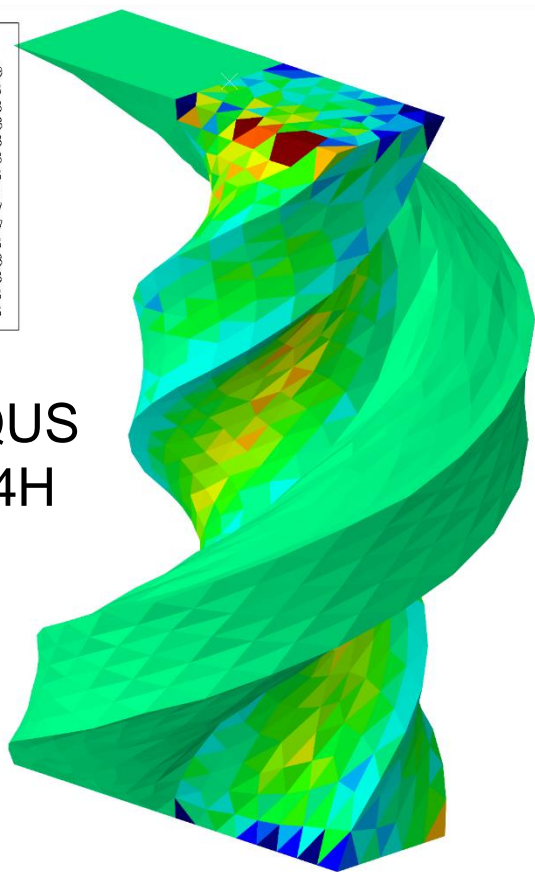
大歪みの場合，ABAQUS C3D4Hでは相当塑性歪みにも振動が現れるが，F-barES-FEM-T4では滑らかとなる。

# ゴム／アルミ合わせ板のねじり

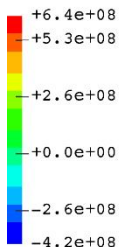
## 圧力分布



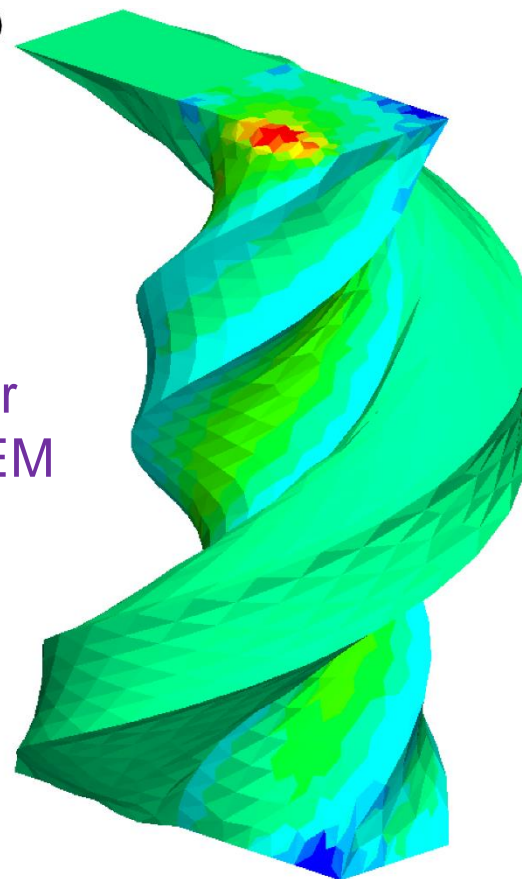
ABAQUS  
C3D4H



Pressure (Pa)



F-bar  
ES-FEM  
-T4

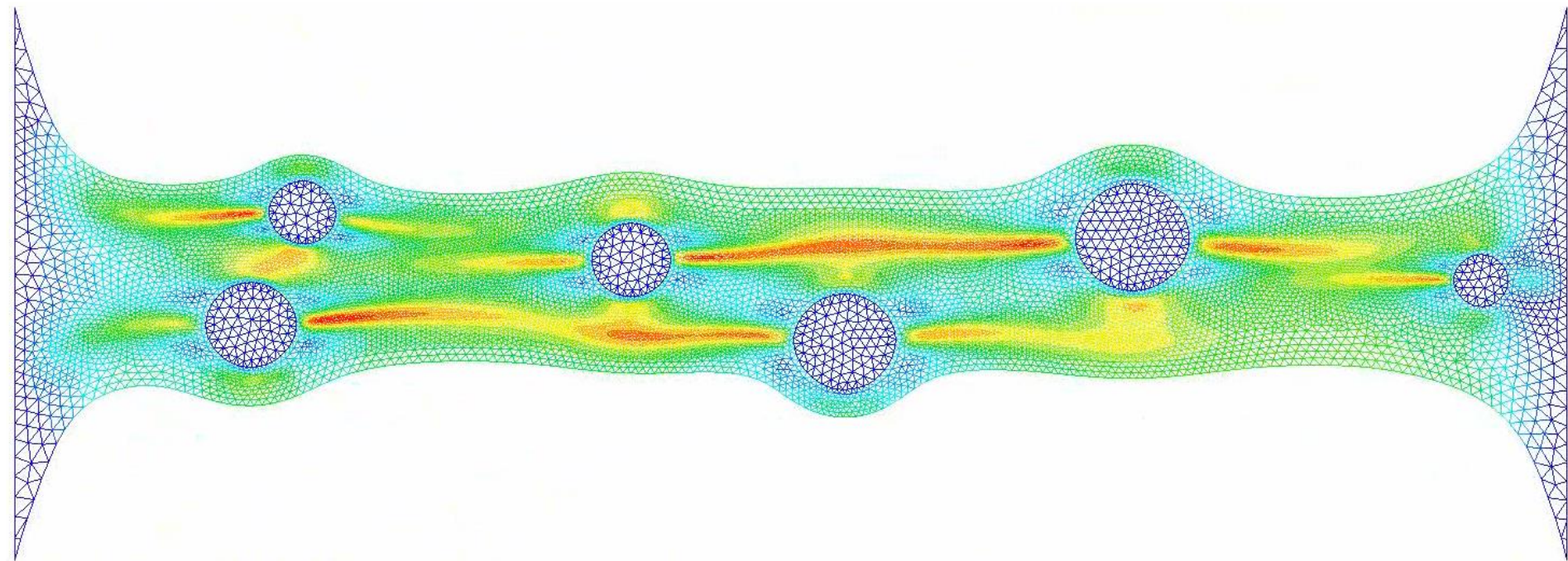


F-barES-FEM-T4は弾塑性大歪み解析でも滑らかな歪みおよび応力分布が得られる。



# ファイラー充填ゴムの引張+リメッシュ

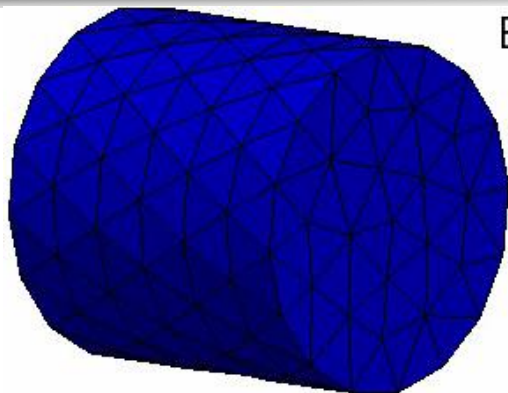
- $1 \times 1$  mの矩形領域内に円形のファイラーが分散.
- 左辺を完全拘束, 右辺を上下拘束して右に強制変位.
- マトリックスもファイラーも  $\nu_{ini} = 0.49$  のneo-Hook超弾性体.
- ファイラーの  $E_{ini}$  はマトリックスの  $E_{ini}$  の100倍.



多数回のリメッシュを経ても妥当なMises応力が得られている

# 弾塑性せん断ネッキング+リメッシュ

- アルミ円柱の左端面を固定し、右端面を下方向に強制変位.
- 変形初期は純粹せん断だが、変形後期は引張が主となる.
- 最終的にはネッキング発生.



Equivalent Plastic Strain

6.00e+00

5.00e+00

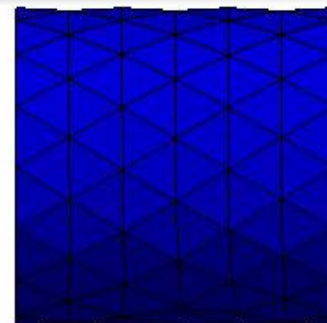
4.00e+00

3.00e+00

2.00e+00

1.00e+00

0.00e+00



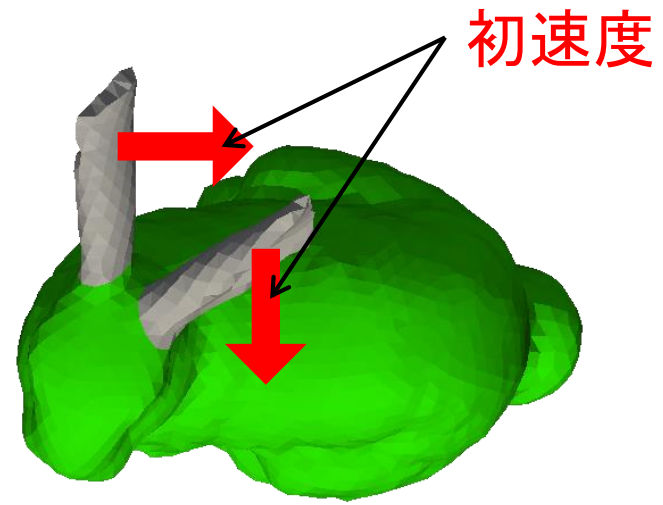
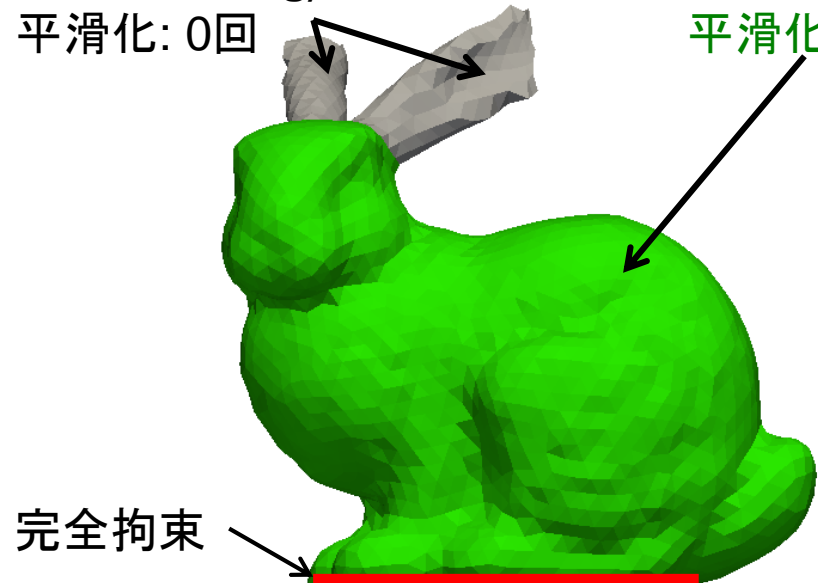
最終的なネック部の  
公称歪みは7000%超

多数回のリメッシュを経て妥当な相当塑性歪みを得られている.

# ゴム/鉄複合材ウサギの動的変形

耳・・・鉄鋼材料  
 初期ヤング率: 200 GPa  
 初期ポアソン比: 0.3  
 密度: 7800 kg/m<sup>3</sup>  
 平滑化: 0回

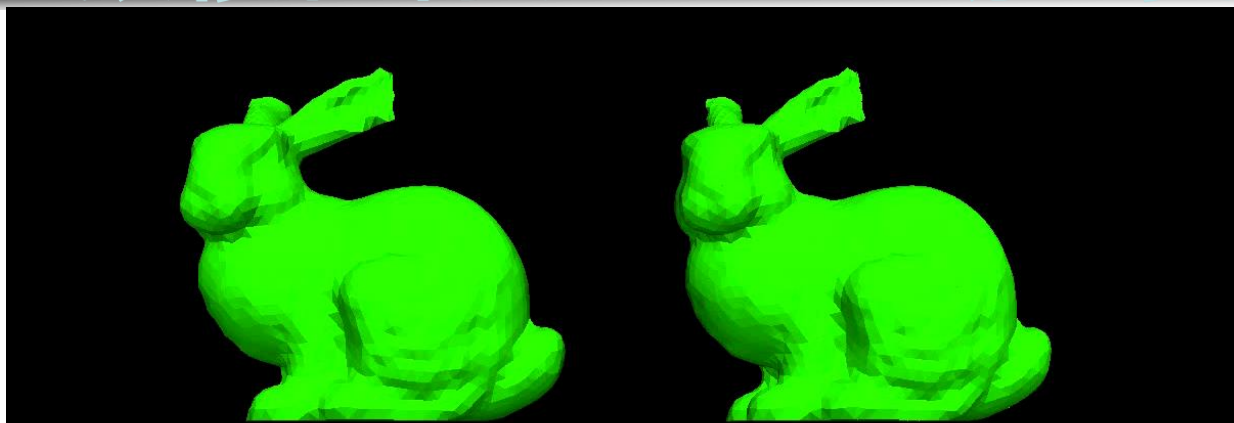
その他・・・ゴム材料  
 初期ヤング率: 6.0MPa  
 初期ポアソン比: 0.49  
 密度: 920 kg/m<sup>3</sup>  
 平滑化: 1回



- 足を完全拘束したウサギ.
- 両耳にそれぞれ一様な初速度を与える.
- 六面体メッシュを使用できない複雑形状.
- 陽解法なのでハイブリッド要素(ABAQUS C3D4Hなど)は使用不可.

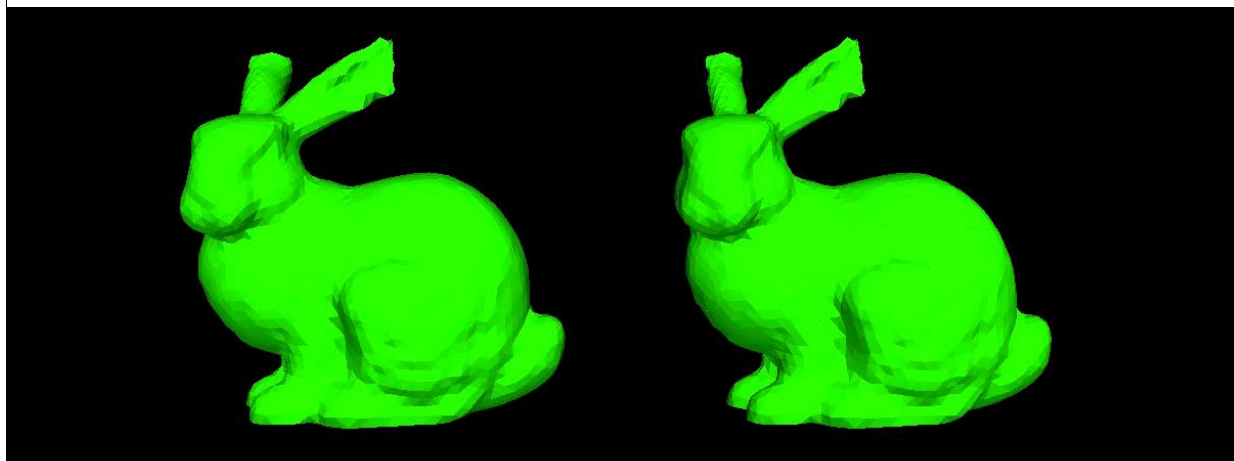
# ゴム/鉄複合材ウサギの動的変形

## 変形と 圧力符号の 時刻歴



ABAQUS/Explicit C3D4

Selective ES/NS-FEM



F-barES-FEM

NS-FEM

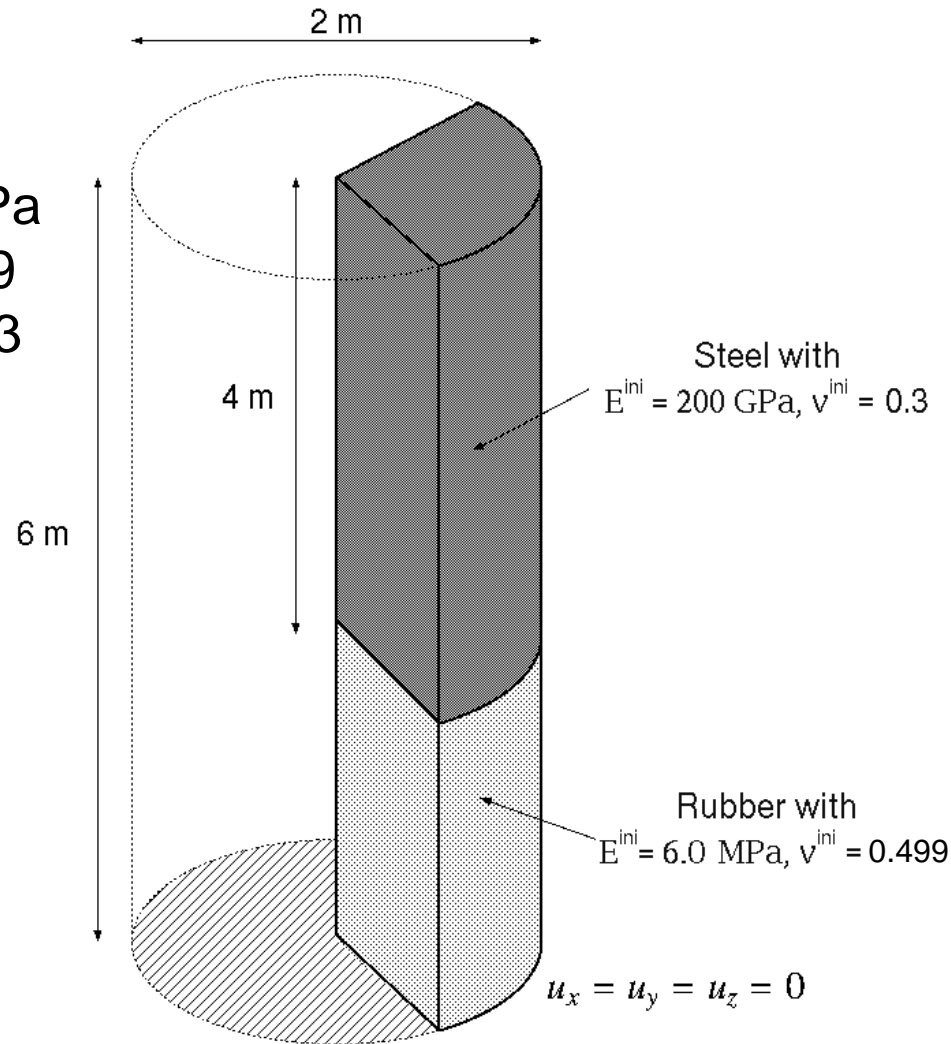
- ABAQUS/Explicit C3D4はロッキングも圧力振動も起こしている.
- F-barES-FEMのみ妥当なロッキングフリーかつ圧力振動無し.

# ゴム/鉄複合材円柱のモード解析

上段 鉄鋼材料  
 ヤング率: 200 GPa  
 ポアソン比: 0.3  
 密度: 7800 kg/m<sup>3</sup>  
 平滑化: 0回

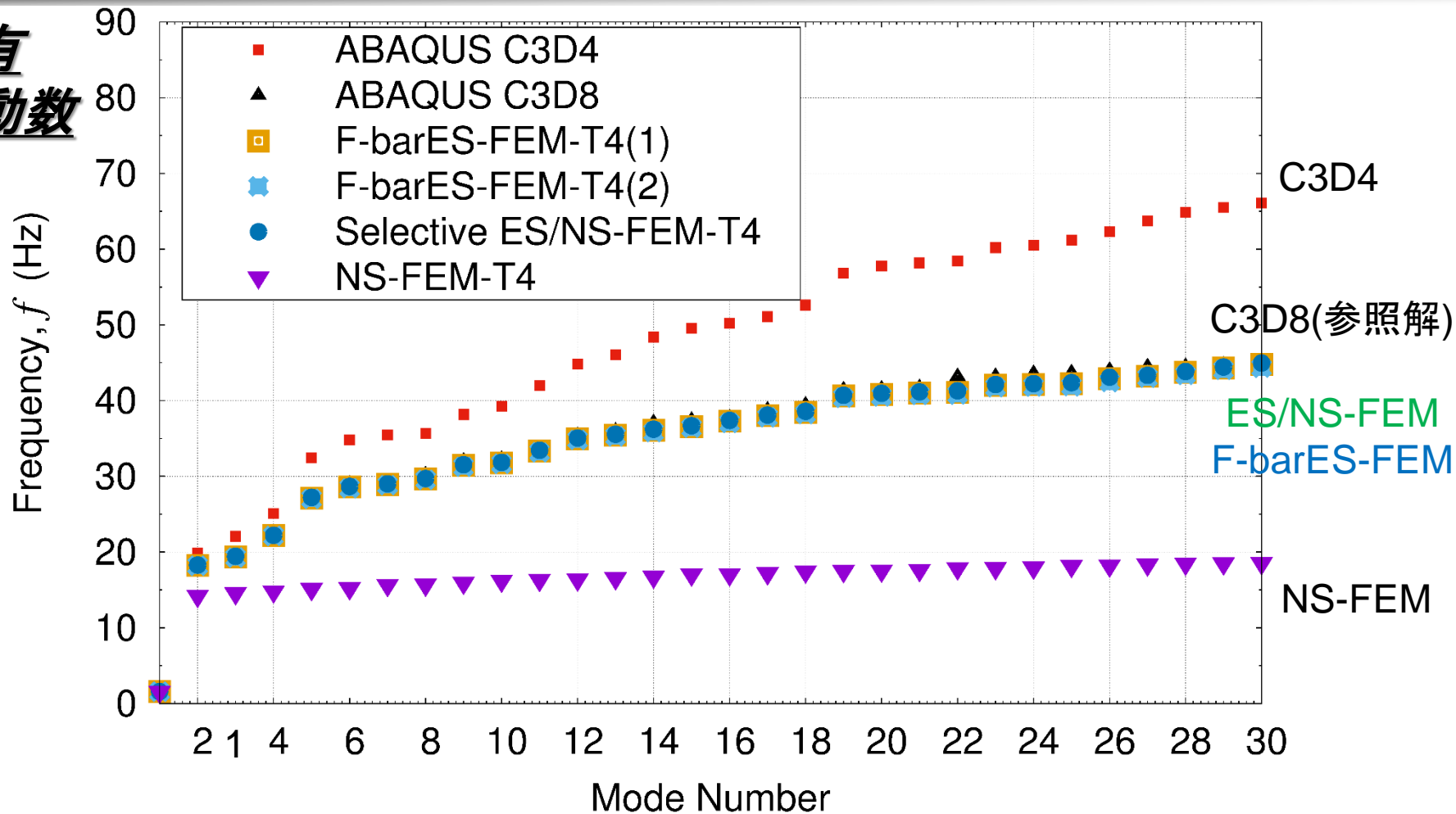
下段 ゴム材料  
 ヤング率: 6.0 MPa  
 ポアソン比: 0.499  
 密度: 920 kg/m<sup>3</sup>  
 平滑化: 2回

- 材料は**線形弾性モデル**
- 底を完全拘束した円柱の1/4モデルのモード解析
- ただし、ねじり・曲げのモードは現れない



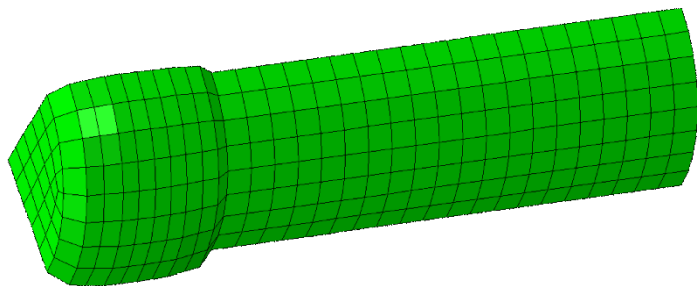
# ゴム/鉄複合材円柱のモード解析

## 固有 振動数

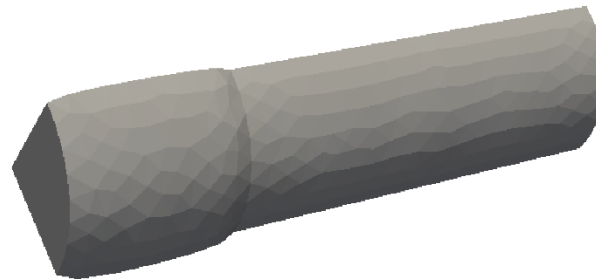


- NS-FEMは柔らかか過ぎて固有振動数の精度が低い.
- Selective ES/NS-FEMとF-barES-FEMは参照解に一致.

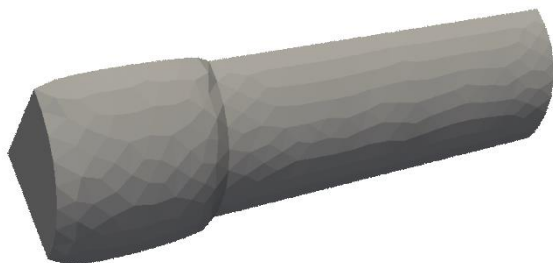
## 1次の固有モード



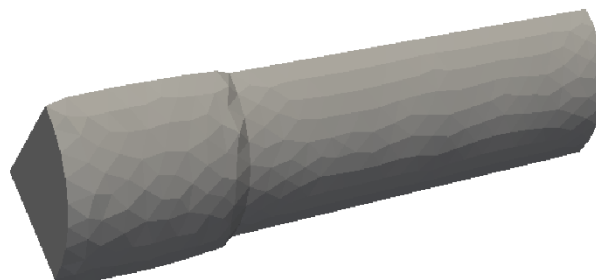
ABAQUS C3D8  
(参照解)



Selective ES/NS-FEM



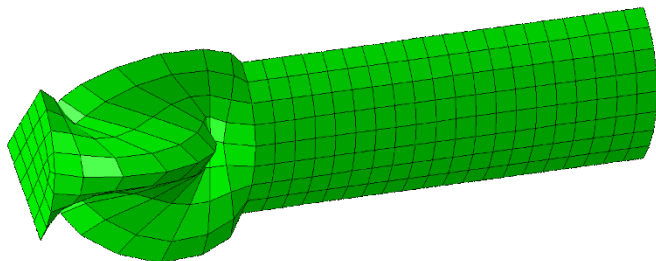
F-bar ES-FEM



NS-FEM

1次モードはいずれも参照解と一致している。

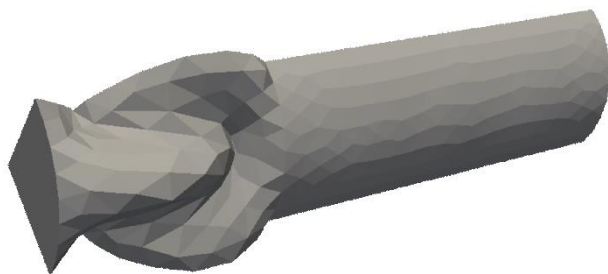
## 11次の固有モード



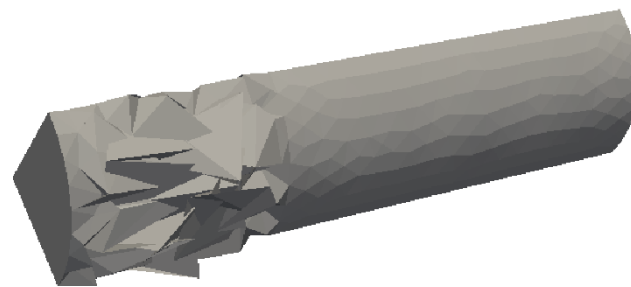
ABAQUS C3D8  
(参照解)



Selective ES/NS-FEM



F-barES-FEM



NS-FEM

- NS-FEMは擬似ゼロエネルギーモードのため形状が異常.
- Selective ES/NS-FEM, F-barES-FEMは参照解に一致.



# まとめ

# まとめ

- 最新の平滑化有限要素法(S-FEM)定式化である **F-barES-FEM-T4**を用いれば, 超弾性や弾塑性でも
  - 4節点四面体要素(中間節点なし)
  - せん断/体積/コーナーロッキングフリー
  - 圧力振動フリー
  - 大変形でも安定が満足されることを示した.
- 静解析大変形において**F-barES-FEM**は恐らく四面体メッシュで**世界最高精度**.
- 接触などの機能を増やすと同時に, **超並列による大規模高速化**が今後の課題.

ご清聴ありがとうございました.

